



تحلیل پایداری ناخطی هندسی و یافتن نقطه‌های بحرانی ساده

با استفاده از چند تابع درونیاب

محمد رضایی پژند^۱، علیرضا نقوی ریابی^۲
(تاریخ دریافت: ۸۹/۶/۱، تاریخ پذیرش: ۹۱/۱۲/۴)

چکیده

طرح بهینه‌ی سازه با بهره‌جویی از مصالح و آرایش شایسته عضوهابه دست می‌آید. در این فرآیند، سازه‌ها لاغر طرح می‌شوند. این گونه سازه‌ها در برابر کمانش ناتوان هستند. به سخن دیگر، پدیده‌ی کمانش، سبب ناکارایی سامانه، با وجود توانایی در بیشتر بخش‌های آن می‌شود. بنابراین، یافتن بار کمانشی اهمیت فراوانی دارد. به طور معمول، برای بررسی پایداری و یافتن بار بحرانی، باید سازه را تحلیل ناخطی نمود. در آغاز این مقاله، به صورت خلاصه به ویژگی‌های پایداری پرداخته می‌شود. پس از آن، پاره‌ای از فن‌های تحلیل ناخطی هندسی و تحلیل پایداری مرور خواهند شد. سرانجام، از چند تابع درونیاب بهره‌جویی می‌شود و روش‌های نوینی برای تحلیل پایداری پیشنهاد می‌گردد.

کلمات کلیدی

تحلیل ناخطی هندسی، فن طول قوس کروی، تحلیل پایداری، درونیابی ماتریس سختی مماسی، بار بحرانی، تابع درونیاب غیرچند جمله‌ای

Geometric Nonlinear Stability Analysis and Finding Simple Critical Points by Using Some Interpolation Functions

M. Rezaiee-Pajand (Professor), A. R. Naghavi (PhD Student)

ABSTRACT

Optimal structural design is obtained by efficiently using material and members' orientation. In this process, thin structures are designed. These kinds of structures are disabled against buckling. In other words, buckling phenomena causes system inefficiency, in spite of having the ability in the most parts of structure. Therefore, finding buckling load is very important. Generally, in order to study stability and calculating critical load, nonlinear structural analysis should be performed. At first, stability features are briefly discussed in this paper. Following this, some of the geometric nonlinear analysis techniques and stability analysis are reviewed. Finally, some of the interpolation functions are utilized and new methods for stability analysis are proposed.

Keywords

Geometric Nonlinear Analysis, Spherical Arc-length Technique, Stability Analysis, Interpolation of Tangent Stiffness Matrix, Critical Load, Non-polynomial Interpolation Function.

۱-استاد گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، mrpajand@yahoo.com

۲- دانشجوی دکتری سازه گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد



در سال ۱۸۵۳ میلادی، دریچلت پایداری را به سان زیر تعریف نمود [1]:

«نقطه‌های یک سامانه‌ی مکانیکی پایدار، پس از تغییر مکان معین و سرعت نخستین معلوم، در یک بازه‌ی تغییر مکانی کراندار، نوسان می‌کنند.»

همان‌گونه که از این تعریف برمی‌آید، پایداری یک ویژگی پویاست و عامل زمان، هرچند به گونه‌ی پوشیده، در این پدیده جای دارد. بنابراین، می‌توان دو گونه پایداری پویا و ایستا برای سازه‌ها تعریف نمود. به دلیل از میان رفتن عامل زمان، مسأله‌های پایداری ایستا، ساده‌تر و روان‌تر می‌باشند. این ویژگی، سبب ناتوانی این گونه تعریف‌ها در پوشش پایداری پویا می‌گردد. باید افزود، تعریف‌های مزبور کاستی دارند و به آن‌ها «تعریف ضعیف» می‌گویند. در ادامه یکی از معروفترین تعریف‌های ضعیف می‌آید [1]:

«سامانه‌ی پایدار، پس از وارد آمدن آشفتگی، به حالت نخستین برمی‌گردد.» اگر پس از وارد آمدن آشفتگی، سازه به وضعیت آغازین بازنگشت و تغییر مکان‌ها رو به افزایش نهاد، به آن دستگاه ناپایدار می‌گویند. باید افزود، در میان این دو حالت، موقعیت تعادل خنثی نیز وجود دارد. در حالت خنثی، سامانه پس از وارد آمدن آشفتگی، در همان موقعیت باقی می‌ماند.

باید دانست، تغییر رفتار سازه در هنگام ناپایداری به پدیده‌ی کماتش معروف می‌باشد. کماتش حالتی است که سازه توانایی تحمل بارهای وارد با حفظ شکل نخستین را ندارد. بنابراین، برای تحمل بار و رسیدن به موقعیت ایستای جدید، تغییر هندسه می‌دهد. خاطر نشان می‌سازد، کماتش به دو گونه پدید می‌آید. نخست، یک عضو از سازه به تنهایی ناپایدار می‌گردد. در این حالت، چون کل سازه پایدار می‌ماند، با بهره جویی از مقاومت پس کماتشی عضو و همچنین با پخش دوباره‌ی نیروها در سازه، می‌توان به بارگذاری ادامه داد. در حالت دیگر، کل سازه کماتش می‌کند. در چنین وضعیتی، هندسه‌ی سازه، برای رسیدن به

حالت پایدار دگرگون می‌شود. گاهی این دگرسانی در هندسه‌ی سازه، سبب ناشایستگی آن در بهره‌برداری می‌شود. به سخن دیگر، از دیدگاه مهندسی سازه کارایی ندارد. بنابراین، نیاز به پیمایش مسیر پس کماتش سازه نمی‌باشد. تحلیل گران دو راه کار برای پیدا کردن بار بحرانی در دست دارند. نخست، پنداره‌ی تغییر شکل‌های کوچک می‌باشد. بار بحرانی با چشم‌پوشی از تغییر شکل‌های پیش کماتشی، با این روش حساب می‌گردد. شیوه‌ی دیگر، بهره جستن از تغییر شکل‌های بزرگ است. در این فن، افزون بر وارد کردن اثر تغییر شکل‌های پیش از کماتش، پیمایش مسیر پس کماتش نیز ممکن می‌گردد.

نقطه‌ی فرین تابع کارمایه، شرط لازم و کافی برای ایستایی سامانه می‌باشد. به خاطر باید سپرد، ایستایی پایدار یک دستگاه، همان نقطه‌ی کمینه‌ی تابع کارمایه‌ی نهفته است. برابری تعادل، از پیدا کردن نقطه‌های ایستا در تابع کارمایه‌ی نهفته به دست می‌آید. باید دانست، برای آزمون پایداری سامانه، هسین تابع کارمایه‌ی نهفته یا ماتریس سختی مماسی بررسی می‌گردد. اگر هسین در نقطه‌ی ایستا، معین مثبت باشد، نقطه‌ی مزبور کمینه است. همچنین، اگر ماتریس سختی مماسی، نیم معین مثبت گردد، تعادل خنثی خواهد بود.

نقطه‌های بحرانی، جز مسیر ایستایی سازه‌اند و معادله‌ی ایستایی سازه را برقرار می‌کنند. افزون بر این، نقطه‌های بحرانی، ویژگی دیگری نیز دارند. در نقطه‌های بحرانی، ماتریس سختی مماسی تکین می‌گردد. باید دانست، در این گونه نقطه‌ها، سازه رفتار ویژه‌ای دارد. در نقطه‌های انشعاب، مسیر ایستایی تغییر می‌کند. از سوی دیگر، در نقطه‌ی حدی، تغییر شکل زیادی در سازه رخ می‌دهد. این پدیده‌ها، به صورت ویژه شدن ماتریس سختی مماسی در نقطه‌ی بحرانی آشکار می‌گردد. باید دانست، در بسیاری از سامانه‌ها، پیش از کماتش، ماتریس مواد دگرگون می‌شود. این ویژگی، سبب دگرگون شدن ماتریس سختی مماسی خواهد شد. ولی سازه‌های فراوانی نیز پیش از تغییر در ماتریس مواد، از دیدگاه مهندسی ناپایدار می‌گردند.



یادآوری می‌نماید، برای تعیین معین مثبت بودن یک ماتریس، از مقدارهای ویژه آن بهره می‌جویند. روش دیگر شناخت نوع ماتریس، استفاده از دترمینان‌های کهاد اصلی آن است [2]. باید دانست، نقطه‌ی ایستا، وضعیت ایستایی تابع کارمایه‌ی نهفته می‌باشد. در میان نقطه‌های تعادل، کمینه‌ی نسبی همان وضعیت پایدار و بیشینه‌ی نسبی، حالت ناپایدار است. نقطه‌های بحرانی شکل‌های گوناگون دارند که در ادامه معرفی می‌شوند:

۱- نقطه‌ی حدی: مماس بر مسیر ایستایی در این نقطه، عمود بر محور بار است. چون مسیر پس‌کمانش در این گونه نقطه‌ها ناپایدار می‌باشد، سازه در این موقعیت به مسیر پایدار پرش می‌کند. از این رو، به آن نقطه‌ی پرش نیز می‌گویند.

۲- نقطه‌ی انشعابی: از برخورد مسیر آغازین و خم‌های دوم، نقطه‌ی انشعابی پدید می‌آید. مسیری که دارای کمترین کارمایه‌ی نهفته باشد، بعد از انشعاب توسط سازه پیموده خواهد شد. به خاطر باید سپرد، بردار ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی در نقطه‌ی انشعاب بر بردار بار ثابت عمود است. باید آگاه بود، نقطه‌های انشعابی نیز دو گونه‌اند. یکی از آن‌ها، نقطه‌ی انشعابی ساده می‌باشد. در این گونه، بردار ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی، در وضعیت بحرانی، یگانه خواهد بود و سازه تنها یک شکل کمانشی دارد. گونه‌ی دیگر، انشعاب چندگانه است. اگر برخورد چندین خم پاسخ در یک محل باشد، نقطه‌ی انشعاب چندگانه خواهد بود. در این حالت، شکل کمانشی سازه در آغاز معلوم نیست.

خاطر نشان می‌کند، یافتن نقطه‌های بحرانی چندگانه، فرآیندی پیچیده است. بار بحرانی سازه‌هایی که چنین نقطه‌ی بحرانی دارند را نمی‌توان با روش‌های تحلیل پایداری معمول برای نقطه‌های بحرانی ساده به دست آورد. به دلیل همین پیچیدگی، تا کنون راه کارهای کمتری برای

یافتن نقطه‌های بحرانی چندگانه پیشنهاد شده است. رضایی پزند و وجدانی بر پایه‌ی رابطه‌های موجود در علم جبر خطی روشی توانمند برای یافتن نقطه‌های بحرانی چندگانه پیشنهاد کردند [3]. در این فن از مشتق‌های جهتی ماتریس سختی مماسی و بردارهای ویژه‌ی آن استفاده می‌شود.

تحلیل ناخطی هندسی

چون سامانه‌ی سخت (صلب) در گیتی یافت نمی‌شود، تمام سازه‌ها زیر اثر بار تغییر شکل می‌دهند. جابه‌جایی گره‌ها، سبب تغییر برخی مشخصه‌های سازه و از آن میان ماتریس سختی مماسی می‌گردد. بنابراین، یکسان پنداشتن ماتریس سختی و سایر ویژگی‌های سازه در طول تحلیل خطی، سبب اختلاف بین نتیجه‌های واقعی و تحلیلی می‌شود. به کار بردن رفتار ناخطی هندسی این مشکل را حل می‌کند. یادآوری می‌کند، انجام تحلیل ناخطی سازه‌ها برای یافتن نقطه‌های کمانشی ضروری می‌باشد. باید دانست، تغییرشکل‌های پیش از کمانش در سازه‌های بزرگ قابل چشم‌پوشی نیست.

تا کنون روش‌های گوناگونی برای تحلیل ناخطی سازه‌ها و پیمایش مسیر ایستایی آن‌ها پیشنهاد شده است. یکی از قدیمی‌ترین روش‌های تحلیل ناخطی، فن نیوتن-رافسون است. در این راهکار، بردار بار نامیزان به تدریج و به صورت تکراری کوچکتر شده و سرانجام صفر می‌گردد. برای افزایش سرعت همگرایی به پاسخ، در هر گام ماتریس سختی مماسی بهنگام می‌شود. این روش نرخ همگرایی درجه دوم دارد. نرخ بالای همگرایی از ویژگی‌های برجسته این روش است. با وجود این، به دلیل بهنگام شدن ماتریس سختی مماسی در هر گام، به زمان زیادی برای تحلیل سازه، به ویژه در سازه‌های بزرگ نیاز دارد. به همین دلیل، پژوهشگران روش نیوتن-رافسون بهبود یافته را پیشنهاد کرده‌اند. در این فن پس از شمار مشخصی تکرار ماتریس سختی مماسی بهنگام می‌شود. اگرچه این فرآیند سبب کاهش زمان برای سوار کردن ماتریس سختی مماسی می‌شود، چون شمار تکرارها را افزایش می‌دهد، می‌تواند

باعث افزایش زمان تحلیل گردد. این ویژگی در سازه‌های با رفتار ناخطی شدید، اهمیت دارد. روش‌های شبه نیوتنی را نیز برای تحلیل سازه‌ها پیشنهاد کرده‌اند. در این راهکارها، در هر گام ماتریس سختی مماسی بر پایه مشخصه‌های گام‌های پیشین تقریب زده می‌شود [4]. بر اساس روش جستجوی محلی، که یک فن بهینه‌سازی است، روش دیگری برای تحلیل ناخطی پیشنهاد شده است که از ماتریس سختی مماسی استفاده نمی‌کند [5]. در این راهکار می‌توان هردو اثر ناخطی مواد و هندسی را در تحلیل وارد کرد. دهقان و هاجریان روش ریاضی دیگری نیز برای حل یک معادله‌ی ناخطی بدون نیاز به مشتق‌های آن پیشنهاد کرده‌اند که دارای نرخ همگرایی درجه دو است [6]. در آینده با توسعه‌ی رابطه‌های این فرآیند برای سازه‌های چند درجه آزادی، استفاده‌ی زیادی از آن در تحلیل ناخطی سازه‌ها خواهد شد.

یکی از ساده‌ترین روش‌های پیمایش مسیر ایستایی، روش کنترل بار است. در هر گام این شیوه، هدف یافتن نقطه‌ی ایستایی است که عامل بار آن به اندازه Δp با عامل بار نقطه کنونی تفاوت داشته باشد. در مرحله‌ی تکراری این روش می‌توان از هریک از راهکارهای تحلیل ناخطی استفاده کرد. این فن توانایی گذر از نقطه حدی را ندارد. به همین دلیل، روش کنترل تغییر مکان پیشنهاد شده است. در این فرآیند، عامل کنترل را درایه ویژه‌ای از بردار تغییر مکان می‌گیرند [7]. اگر چه این روش توانایی گذر از نقطه حدی را دارد، ولی در نقطه‌ی بازگشت واگرا می‌شود.

به دلیل مشکل‌های روش‌های کنترل بار و تغییر مکان، شیوه‌های طول قوس پیشنهاد شده‌اند که نخستین آن‌ها را ریکس پیشنهاد کرد [7]. در فن‌های طول قوس عامل کنترل را طول خم بین دو نقطه‌ی تعادل پیاپی می‌گیرند. روش‌های طول قوس بسیار گوناگونند. تفاوت این راهکارها در معادله‌ی شرط بخش تکراری است و در گام نمودی به طور کامل یکسانند. یکی از مشهورترین و تواناترین روش‌های طول قوس، فن طول قوس کروی است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد [8]. اگرچه شیوه‌های طول قوس توانایی

گذر از نقطه بازگشت و نیز نقطه‌های بحرانی (نقطه‌های حدی و انشعاب) را دارند، ولی به دلیل ویژه شدن ماتریس سختی مماسی در نقطه‌های بحرانی، سرعت همگرایی در همسایگی این نقطه‌ها کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکل، در روش‌های طول قوس و نیز سایر راهکارهای پیمایش مسیر ایستایی، مولر فن نیوتن-رافسون پایدار شده را برای اصلاح ماتریس سختی مماسی در همسایگی این نقطه‌ها پیشنهاد کرد. با بهره‌جویی از این راهکار، توانایی گذر از نقطه حدی با روش کنترل بار نیز فراهم می‌آید [9]. روش توانای دیگری که برای پیمایش مسیر ایستایی پیشنهاد شده است، الگوریتم جریان نام دارد. در این فن در مرحله‌ی تکراری، از خم‌های جریان داویدنکو و مسیرهای عمود برای افزایش سرعت همگرایی به نقطه تعادل استفاده می‌شود [10].

فن طول قوس کروی

شیوه‌های واری بار و نیز واری تغییر مکان توانایی پیمایش هر نوع مسیر ایستایی را ندارند. روش واری بار در نقطه‌های حدی و فن واری تغییر مکان در نقطه‌های بازگشت تغییر مکان واگرا می‌شوند. فرآیند واری طول قوس هر دو عامل نیرو و تغییر مکان را به یکدیگر وابسته می‌کند. بنابراین، توانایی گذر از این نقطه‌ها را دارد. عامل واری در این شیوه، طول بردار مماس بر مسیر می‌باشد. به دلیل توانایی بالای این فرآیند، پژوهشگران زیادی برای بهبود عملکرد و سرعت همگرایی آن، راهکارهایی را بر آن پایه آفریده‌اند. تفاوت فن‌های گوناگون طول قوس در بخش تکراری آن‌هاست. باید دانست، بخش نمودی در تمامی شیوه‌های طول قوس یکسان می‌باشد. در ادامه، یک گونه‌ی مشهور از این فرآیندها می‌آید. در این فن تکرارها روی کره‌ای به مرکز نقطه‌ی پیشین و شعاع معلوم قرار دارند. برابری ایستایی و رابطه‌ی شرط در شیوه‌ی طول قوس کروی به شکل زیراند [11]:

$$\begin{cases} [K]\{\Delta u\} - \Delta p\{q\} = \{0\} \\ \{\Delta u\}^T \{\Delta u\} + \Delta p^2 \psi^2 \{q\}^T \{q\} - l^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$



(۱۲)

$a_3 = (\{\Delta u\}_0 + \{\delta u''\})^T (\{\Delta u\}_0 + \{\delta u''\}) + \Delta p_0^2 \psi^2 \{q\}^T \{q\} - l^2$
سه حالت زیر برای معادله‌ی (۹) قابل پیش بینی است:
۱- اگر $\Delta > 0$ باشد، دو ریشه‌ی حقیقی برای نمو بار به دست می‌آید.

۲- اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله تنها یک ریشه‌ی دوگان دارد.

۳- اگر $\Delta < 0$ باشد، مقدار حقیقی برای نمو بار به دست نمی‌آید.

در حالت نخست، ریشه‌ی مناسب را باید برگزید. انتخاب ریشه‌ی مناسب سبب همگرایی بهتر می‌شود. در سازه‌های معمولی، از میان دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی (۹)، آن که سبب پیدایش برداری با کمینه‌ی زاویه از $\{\Delta u\}_0$ شود، انتخاب می‌گردد. به سخن دیگر، از میان دو بردار زیر آن که زاویه‌ی کوچکتری با $\{\Delta u\}_0$ بسازد را برمی‌گزینند.

$$\{\Delta u\}_{n1} = \{\Delta u\}_0 + \{\delta u''\} + \delta p_1 \{\delta u'\} \quad (۱۳)$$

$$\{\Delta u\}_{n2} = \{\Delta u\}_0 + \{\delta u''\} + \delta p_2 \{\delta u'\} \quad (۱۴)$$

زاویه‌ی بین دو بردار با ضرب داخلی آن‌ها و با رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\cos(\theta) = \frac{\{\Delta u\}_0^T (\{\Delta u\}_0 + \{\delta u''\}) + \delta p \{\Delta u\}_0^T \{\delta u'\}}{l^2} \quad (۱۵)$$

چون کسینوس یک تابع نزولی است، پاسخ، مقدار بیشینه‌ی رابطه‌ی (۱۵) می‌باشد. این انتخاب برای سازه‌های معمولی مناسب است. در سازه‌های با رفتار ناخطی شدید، انتخاب مقدار کمینه‌ی رابطه‌ی (۱۵)، می‌تواند سرعت همگرایی بهتری در پی داشته باشد [11]. نمونه‌ای از این رفتار در شکل (۲) نشان داده شده است.

تا کنون، بخش تکراری روش طول قوس بررسی شد. بخش نمودی تحلیل نیز اهمیت زیادی دارد. به سخن دیگر، در صورت انتخاب ناشایسته‌ی نمو، تحلیل بر روی مسیر ایستایی پیمایش شده برمی‌گردد. همچنین، پیمایش کامل مسیر ایستایی پس از نقطه‌های انشعاب و یا برگشت به عقب، با انتخاب مناسب نمو بار ممکن می‌شود. در بخش

در این رابطه، $[K]$ ماتریس سختی مماسی، $\{q\}$ بردار بار ثابت، $\{\Delta u\}$ و Δp ، به ترتیب، نمو تغییر مکان و نمو عامل بار هستند. تحلیل‌گر در آغاز تحلیل، عامل واری l را انتخاب می‌کند. عامل ψ ، اثر بار را در معادله‌ی شرط وارد می‌نماید. دستگاه رابطه‌ی (۱) در گام نمودی حل می‌شود. در بخش تکراری، از دستگاه زیر استفاده می‌گردد:

$$[K]\{\delta u\} - \delta p\{q\} = -\{r\} \quad (۲)$$

$$\{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_n\} + \Delta p_n^2 \psi^2 \{q\}^T \{q\} - l^2 = 0 \quad (۳)$$

عامل‌های نمودی تغییر مکان $\{\Delta u\}_n$ و بار Δp_n از نقطه‌ی همگرایی پیشین سنجیده می‌شود. بنابراین، اگر $\{\Delta u\}_0$ و Δp_0 عامل‌هایی برای تکرار پیشین باشند، می‌توان نوشت:

$$\{\Delta u\}_n = \{\Delta u\}_0 + \{\delta u\} \quad (۴)$$

$$\Delta p_n = \Delta p_0 + \delta p \quad (۵)$$

بردارهای $\{\delta u'\}_k$ و $\{\delta u''\}_k$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[K]_k \{\delta u'\}_k = \{q\} \quad (۶)$$

$$[K]_k \{\delta u''\}_k = -\{r\}_k \quad (۷)$$

بار نامیزان در نقطه‌ی k بردار $\{r\}_k$ می‌باشد. با بهره جستن از رابطه‌های (۶) و (۷) می‌توان $\{\delta u\}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\{\delta u\}_k = \{\delta u''\}_k + \delta p_k \{\delta u'\}_k \quad (۸)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۴) تا (۸) در (۳) و بازآرایی آن، معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر برای δp به دست می‌آید:

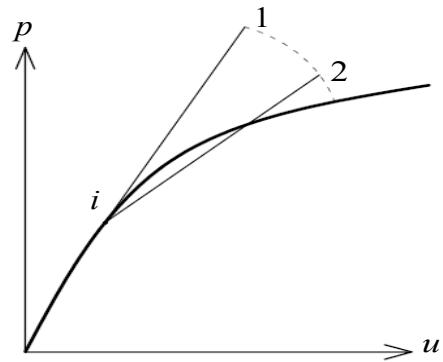
$$a_1 (\delta p)^2 + a_2 \delta p + a_3 = 0 \quad (۹)$$

ضریب‌های معادله‌ی کنونی به گونه‌ی زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

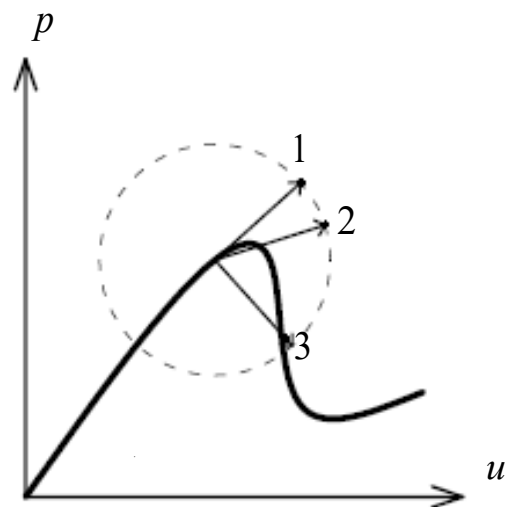
$$a_1 = \{\delta u'\}^T \{\delta u'\} + \psi^2 \{q\}^T \{q\} \quad (۱۰)$$

$$a_2 = 2\{\delta u'\}^T (\{\Delta u\}_0 + \{\delta u''\}) + 2\Delta p_0 \psi^2 \{q\}^T \{q\} \quad (۱۱)$$

طول قوس کروی، دستگاه نمودی همان رابطه‌ی (۱) است. با تعریف عامل زیر، این دستگاه حل می‌گردد.



شکل (۱): روش طول قوس کروی



شکل (۲): شیوه‌ی طول قوس کروی در سازه‌ای با رفتار ناخطی شدید

$$\{\delta u'\} = [K_T]^{-1} \{q\} \quad (16)$$

بنابراین، می‌توان نمود تغییر مکان را به گونه زیر نوشت:

$$\{\Delta u\} = \{\delta u'\} \Delta p \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه‌ی کنونی در برابری دوم معادله‌ی

(۱)، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [12]:

$$\Delta p = \pm \frac{l}{\sqrt{\{\delta u'\}^T \{\delta u'\} + \psi^2 \{q\}^T \{q\}}} = s \frac{l}{\sqrt{\{\delta u'\}^T \{\delta u'\} + \psi^2 \{q\}^T \{q\}}} \quad (18)$$

پژوهشگران برای انتخاب علامت s ، پیشنهادها‌ی گوناگونی ارائه داده‌اند. در ادامه به بررسی پاره‌ای از آن‌ها پرداخته می‌شود [13,14].

۱- علامت عامل سختی کنونی

$$Sign(\Delta p) = Sign(S_p)$$

۲- علامت تغییر نمود کار

$$Sign(\Delta p) = Sign(\{\delta u'\}^T \{q\})$$

۳- علامت دترمینان ماتریس سختی مماسی

$$Sign(\Delta p) = Sign([K_T])$$

۴- علامت شاخص فنگ و همکاران

$$Sign(\Delta p) = Sign(\{\delta u\}_n^T \{\delta u'\})$$

در بند چهارم، $\{\delta u\}_n$ تفاوت میان بردار تغییر مکان کنونی و نقطه‌ی پیشین می‌باشد. به سخن دیگر، می‌توان نوشت:

$$\{\delta u\}_n = \{u\}_n - \{u\}_{n-1} \quad (19)$$

تحلیل‌گر با شناخت رفتار سازه، می‌تواند هرکدام از این فن‌ها را انتخاب نماید. باید افزود، تغییر نمود کار، در نقطه‌های بازگشت تغییر مکان ناتوان می‌گردد. دترمینان ماتریس سختی مماسی نیز در نقطه‌های انشعاب مسیر آغازین را رها می‌سازد و ادامه‌ی تحلیل از مسیر دوم انجام می‌پذیرد.

یافتن نقطه‌های بحرانی ساده

نقطه‌های بحرانی، جز مسیر ایستایی سازه‌اند و معادله‌ی ایستایی سازه را برقرار می‌کنند. افزون بر این، نقطه‌های بحرانی، ویژگی دیگری نیز دارند. در نقطه‌های بحرانی، ماتریس سختی مماسی تکین می‌گردد.

به طور کلی، با دو شیوه‌ی مستقیم و غیرمستقیم، نقطه‌های بحرانی به دست می‌آیند. در نخستین راهکار، نقطه‌ی بحرانی به شکل مستقیم و بدون واسطه پیدا می‌شود. به سخن دیگر، برای یافتن آن، نیاز به پیمایش مسیر ایستایی نمی‌باشد. این نقطه‌ها با حل یک دستگاه معادله‌ی ناخطی افزوده در دسترس قرار می‌گیرد. در تمام این فن‌ها، معادله‌ی ایستایی به کار می‌رود. معادله‌های دیگری که به طور همزمان با معادله ایستایی حل می‌شوند، به شیوه‌ی مورد نظر بستگی دارد.

در فرآیند غیرمستقیم، با پیمایش مسیر ایستایی، نقطه‌های بحرانی نیز در دسترس قرار می‌گیرند. در این فن، هنگام پیمایش مسیر ایستایی، عبور از نقطه‌ی بحرانی مشخص



این ماتریس با تجزیه‌ی ماتریس سختی مماسی به گونه‌ی زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$[K_T] = [L][D][L^T] \quad (20)$$

ماتریس پایین مثلثی $[L]$ ، با درایه‌ی یک‌ه روی قطر اصلی می‌باشد. ماتریس $[D]$ قطری است. با توجه به سازه، تحلیل‌گر تابع آزمون مناسب را انتخاب می‌کند. یادآوری می‌کند، دترمینان ماتریس سختی مماسی، توانایی نشان دادن نقطه‌ی بحرانی چندگانه را ندارد، با وجود این، این تابع آزمون، توانایی بالایی برای یافتن نقطه‌های بحرانی ساده دارد [11]. در ادامه به چند روش غیرمستقیم پرداخته می‌شود و پس از آن رابطه‌های پیشنهادی جدید می‌آیند.

راهکار غیرمستقیم، بر پایه‌ی حرکت روی مسیر ایستایی استوار است. انتخاب شیوه‌ای مناسب برای تحلیل و نیز تابع آزمون شایسته در این فن، اهمیت بسیار ویژه‌ای دارد. چون وضعیت نخستین، حالت پایدار می‌باشد، تابع آزمون در آن نقطه مثبت است ($\tau > 0$). با یک نمو معلوم و حرکت روی مسیر ایستایی می‌توان از نقطه‌ی بحرانی عبور کرد. در پایان نمو، تابع آزمون منفی می‌شود ($\tau < 0$). با این حساب، به دلیل پیوستگی تابع آزمون، دست کم یک ریشه در این بازه دارد. به سخن دیگر، نقطه‌ی بحرانی در فاصله‌ی این نمو قرار می‌گیرد. ساده‌ترین فرآیند یافتن نقطه‌ی بحرانی، درونیابی خطی بین دو مقدار تابع آزمون می‌باشد:

$$p_{cr} = p_i + \frac{p_{i+1} - p_i}{\tau_i - \tau_{i+1}} \tau_i \quad (21)$$

در رابطه‌ی کنونی، p_{cr} ، عامل بار بحرانی و p_i و τ_i و p_{i+1} و τ_{i+1} ، به ترتیب، عامل بار و مقدار تابع آزمون در آغاز و پایان نمو است. همچنین، برای افزایش دقت، می‌توان در بازه‌ی مزبور n نقطه پیش بینی نمود.

روش ساده‌ی خطی

می‌گردد. روش طول قوس، یکی از شایسته‌ترین راهکارها برای پیمایش مسیر ایستایی می‌باشد. در این شیوه، در هر نقطه‌ی خم ایستایی، آزمون پایداری انجام می‌پذیرد. به سخن دیگر، معین مثبت بودن ماتریس سختی مماسی وارسی می‌گردد. این کار با استفاده از تابع‌های آزمون انجام می‌گیرد. تابعی را که ریشه‌ی آن نقطه‌ی بحرانی است، تابع آزمون بار بحرانی می‌نامند. به سخن دیگر، این تابع‌ها خاصیت ویژه شدن ماتریس سختی مماسی را در ریشه‌ی خود دارند. در هر دو روش مستقیم و غیرمستقیم، از تابع‌های آزمون استفاده می‌شود. شماری از تابع‌های آزمون در هر دو روش کاربرد دارند که در ادامه پاره‌ای از آن‌ها می‌آیند. انتخاب تابع آزمون شایسته، از مهمترین بخش‌های تحلیل کمانشی می‌باشد. پژوهشگران تابع آزمون‌های مختلفی پیشنهاد کرده‌اند که هر یک توانایی‌ها و کاستی‌هایی دارد. برای نمونه، دترمینان ماتریس سختی مماسی، یک تابع آزمون مناسب برای نقطه‌ی حدی و انشعابی ساده می‌باشد [11]. باید افزود، گاهی در حالت‌های انشعابی چندگانه، این تابع آزمون تغییر علامت نمی‌دهد. بنابراین، تحلیل‌گر از گذر از نقطه‌ی بحرانی، آگاه نمی‌شود. همچنین، در نقطه‌های عادی روی مسیر ایستایی، مقدار تابع بسیار بزرگ می‌باشد. شاید کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی، بهترین تابع آزمون باشد. ولی به‌دست آوردن آن نیاز به حافظه‌ی رایانه‌ای زیادی دارد. در ادامه چند تابع آزمون معمول معرفی می‌گردد.

۱- دترمینان ماتریس سختی مماسی

۲- کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی

۳- حاصلضرب D_{max} و D_{min}

۴- کوچکترین لولا D_{min}

عامل‌های D_{max} و D_{min} ، به ترتیب، کوچکترین و بزرگترین درایه‌ی قطر اصلی در ماتریس $[D]$ می‌باشند.

فوجیکک، این شیوه را برای یافتن نقطه‌ی بحرانی ساده پیشنهاد کرده است [15]. در این روش، نخست مسیر ایستایی را تا نقطه‌ی بحرانی می‌پیمایند. سپس، ماتریس سختی مماسی در نقطه‌ی پیش از کمانش و پس از آن، انبار می‌گردد. انتخاب الگوی تغییر خطی برای درایه‌های ماتریس سختی مماسی در این بازه، از ویژگی‌های این فرآیند می‌باشد. باید آگاه بود، چون تغییر واقعی ماتریس سختی مماسی خطی نیست، مقداری خطا وارد می‌گردد. سادگی این فن از خوبی‌های آن می‌باشد. می‌توان تغییر ماتریس سختی مماسی را به صورت زیر نوشت:

$$[\Delta K] = [K_1] - [K_2] \quad (22)$$

ماتریس سختی مماسی در نقطه‌های پیش و پس از کمانش، $[K_1]$ و $[K_2]$ می‌باشند. ماتریس سختی مماسی در نقطه‌ی کمانش به سان زیر درمی‌آید:

$$[K] = [K_1] - \left(\frac{P_{cr} - P_1}{\Delta p} \right) [\Delta K] \quad (23)$$

بار بحرانی سازه P_{cr} می‌باشد. بار در نقطه‌ی پیش از کمانش، P_1 است. در این رابطه، نمو بار با Δp نشان داده می‌شود. برای یافتن P_{cr} ، دستگاه مقدار ویژه‌ی زیر بر پا می‌گردد:

$$[K_1]\{X\} = \lambda[\Delta K]\{X\} \quad (24)$$

پس از یافتن λ ، P_{cr} از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$P_{cr} = \lambda \Delta p + P_1 \quad (25)$$

یکی دیگر از روش‌های ساده و موثر یافتن بار بحرانی، استفاده از مقدار ویژه‌ی تقریبی است که آیکدا و همکاران آن را پیشنهاد کرده‌اند [16]. در این شیوه، بر پایه‌ی نمو بردار تغییر مکان در هر گام، تقریبی از بردار ویژه و در نتیجه تقریبی از مقدار ویژه به دست می‌آید.

در ادامه‌ی کار، رابطه‌های جدیدی بر پایه‌ی درونیابی درایه‌های ماتریس سختی مماسی پیشنهاد می‌شود. تفاوت این روش‌ها در نوع تابع درونیاب به کار رفته می‌باشد.

رابطه‌های پیشنهادی برای تحلیل پایداری

از جمله‌های $\cos\left(\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2}\right)$ ، ε ، 1 برای درونیابی تابعی در فاصله $(-a, 1)$ و در سه نقطه $0, 1, -a$ بهره جویی می‌شود. بر پایه‌ی رابطه‌های روش اجزای محدود، تابع‌های درونیاب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A = -1 - a + \cos\left(\frac{\pi \cdot a}{2}\right)$$

$$N_1 = \frac{-1 + \varepsilon + \cos\left(\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2}\right)}{A}$$

$$N_2 = \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot a}{2}\right) \times (1 - \varepsilon) - (1 + a) \times \cos\left(\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2}\right)}{A}$$

$$N_3 = \frac{-a + (\cos\left(\frac{\pi \cdot a}{2}\right) - 1)\varepsilon + a \times \cos\left(\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2}\right)}{A} \quad (26)$$

از این تابع‌ها برای درونیابی ماتریس سختی مماسی و عامل بار در سه نقطه پیاپی از مسیر ایستایی در این اثر استفاده خواهد شد. اگر ماتریس سختی مماسی در نقطه-ی پس از کمانش $[K_1]$ باشد، می‌توان ماتریس سختی مماسی در گام پیش از کمانش را می‌توان با $[K_0]$ نشان داد. ماتریس سختی مماسی در گام پیش از آن را نیز می‌توان $[K_{-1}]$ نامید. این ماتریس‌ها وابسته به سه نقطه‌ی پیاپی از مسیر ایستایی می‌باشند که کوچکترین مقدار ویژه‌ی مربوط به $[K_0]$ مثبت و کوچکترین مقدار ویژه‌ی مربوط به $[K_1]$ منفی می‌باشد. برای ماتریس سختی مماسی می‌توان نوشت:

$$[K] = N_1 \times [K_{-1}] + N_2 \times [K_0] + N_3 \times [K_1] \quad (27)$$

در این رابطه، $[K]$ ماتریس سختی مماسی در فاصله‌ی تحلیل می‌باشد. همچنین، ε عددی بین $-a$ و 1 می‌باشد که a عددی دلخواه است. هدف، یافتن ε به



وقتی ε بین $-a$ و 1 تغییر می‌کند، تغییر عامل بار خطی باشد. بر این پایه می‌توان a را از رابطه‌ی زیر یافت:

$$a = \frac{p_0 - p_{-1}}{p_1 - p_0} \quad (33)$$

به همین شیوه می‌توان از تابع‌های درونیاب با جمله e^ε یا $e^{-\varepsilon}$ بهره جست. در ادامه، رابطه‌های این دو جمله به صورت خلاصه می‌آیند.

۱- تابع درونیاب با استفاده از جمله e^ε

$$A = -1 - a + ae + e^{-a}$$

$$N_1 = \frac{-1 + (1 - e)\varepsilon + e^\varepsilon}{A}$$

$$N_2 = \frac{ae + e^{-a} + (e - e^{-a})\varepsilon - (1 + a)e^\varepsilon}{A}$$

$$N_3 = \frac{-a + (e^{-a} - 1)\varepsilon + ae^\varepsilon}{A} \quad (34)$$

(35)

$$[K] = N_1 \times [K_{-1}] + N_2 \times [K_0] + N_3 \times [K_1] \quad (36)$$

$$\lambda'(0) = \frac{\{x\}^T \left(\frac{(2-e)}{A} [K_{-1}] + \frac{(e-e^{-a}-1-a)}{A} [K_0] + \frac{(e^{-a}-1+a)}{A} [K_1] \right) \{x\}}{\{x\}^T \{x\}} \quad (37)$$

(37)

$$\lambda''(0) = \frac{\{x\}^T \left(\frac{1}{A} [K_{-1}] + \frac{(-1-a)}{A} [K_0] + \frac{a}{A} [K_1] \right) \{x\}}{\{x\}^T \{x\}}$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon \lambda' + \frac{\varepsilon^2}{2} \lambda'' \quad (38)$$

$$\varepsilon = \frac{-\lambda' \pm \sqrt{(\lambda')^2 - 2\lambda\lambda''}}{\lambda''} \quad (39)$$

(40)

$$p_{cr} = N_1(\varepsilon_0) \times p_{-1} + N_2(\varepsilon_0) \times p_0 + N_3(\varepsilon_0) \times p_1$$

گونه‌ای است که ماتریس $[K]$ ویژه شود. با بهره جویی از راهکارهای ریاضی، می‌توان نوشت [17]:

$$\lambda'(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\varepsilon) - \lambda}{\varepsilon} = \frac{\{x\}^T \left(\frac{1}{A} [K_{-1}] + \frac{-\cos(\frac{\pi a}{2})}{A} [K_0] + \frac{\cos(\frac{\pi a}{2}) - 1}{A} [K_1] \right) \{x\}}{\{x\}^T \{x\}} \quad (28)$$

$$\lambda''(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda'(\varepsilon) - \lambda'(0)}{\varepsilon} = \frac{\pi^2}{4A} \times \frac{\{x\}^T \left([K_{-1}] - (1+a) \times [K_0] + a \times [K_1] \right) \{x\}}{\{x\}^T \{x\}} \quad (29)$$

در این رابطه‌ها، λ کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس $[K_0]$ است. بردار ویژه‌ی وابسته به این مقدار ویژه با $\{x\}$ مشخص شده است. اگر از دو جمله‌ی نخست گسترش تیلور تابع کوچکترین مقدار ویژه استفاده شود، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon \lambda' + \frac{\varepsilon^2}{2} \lambda'' \quad (30)$$

باید ε به گونه‌ای انتخاب شود که ماتریس سختی مماسی ویژه شود. بنابراین، رابطه‌ی (5) برابر صفر قرار می‌گیرد. پاسخ‌های این برابری به گونه‌ی زیر در دسترس قرار می‌گیرند.

$$\varepsilon = \frac{-\lambda' \pm \sqrt{(\lambda')^2 - 2\lambda\lambda''}}{\lambda''} \quad (31)$$

خاطر نشان می‌کند، در رابطه‌ی کنونی، مقدارهایی از ε پذیرفتنی هستند که بین 0 و 1 قرار گیرند. با مشخص شدن ε ، بار بحرانی نیز با درونیابی به دست می‌آید. اگر ε_0 پاسخ مناسب رابطه‌ی (6) باشد، بار بحرانی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

(32)

$$p_{cr} = N_1(\varepsilon_0) \times p_{-1} + N_2(\varepsilon_0) \times p_0 + N_3(\varepsilon_0) \times p_1$$

در این رابطه، عامل بار بحرانی با p_{cr} نمایش داده شده است. عامل بار p_i وابسته به ماتریس سختی $[K_i]$ می‌باشد. تابع‌های درونیاب N_i در رابطه (26) معرفی شده‌اند. یک انتخاب برای عامل a به گونه‌ای است که

هستند که توسط پژوهشگران بررسی شده‌اند و بارهای بحرانی دقیق آن‌ها نیز در دست است.

جدول شماره (۱) نام گذاری فن‌های پیشنهادی را نشان می‌دهد. در این‌جا نتیجه تحلیل هر سازه، با مقدار دقیق بار بحرانی و نیز روش درونیابی درجه دوم کوچکترین مقدار ویژه، که پیش از آن اشاره شد، مقایسه شده است.

جدول (۱): نام گذاری روش‌های پیشنهادی

شماره روش	راهکار مورد استفاده
۱	یافتن بار بحرانی با راهکار درونیابی مرتبه دوم کوچکترین مقدار ویژه
۲	یافتن بار بحرانی با فن درونیابی Cos
۳	یافتن بار بحرانی با فن درونیابی e^x
۴	یافتن بار بحرانی با فن درونیابی e^{-x}

۱- خرپای وان-میزر

نخستین مثال سازه شکل (۳) می‌باشد. به دلیل شکل ساده، بار بحرانی دقیق این سازه برای زاویه‌های مختلف θ در دست است [18]. اگر $\theta > 32.264^\circ$ باشد، سازه نقطه انشعاب خواهد داشت. در این مقاله $\theta = 80^\circ$ فرض شده است. مشخصه‌های دیگر به صورت $L = 1$ و $AE = 10^7$ هستند. جدول (۲) نتیجه‌ی تحلیل کمانشی این سازه را نشان می‌دهد. پاسخ‌ها آشکار می‌سازند که نتیجه‌ها بسیار نزدیک به هم هستند و با دقت مناسبی بار بحرانی را در دسترس می‌گذارند. در بین این روش‌ها، فن شماره (۴) (درونیابی با جمله $e^{-\varepsilon}$) پاسخ بهتری نسبت به روش‌های دیگر دارد.

$$a = \frac{p_0 - p_{-1}}{p_1 - p_0} \quad (41)$$

۲- تابع درونیاب با استفاده از جمله $e^{-\varepsilon}$

$$A = -1 - a + \frac{a}{e} + e^a$$

$$N_1 = \frac{-1 + (1 - e^{-1})\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{A}$$

$$N_2 = \frac{ae^{-1} + e^a + (e^{-1} - e^a)\varepsilon - (1 + a)e^{-\varepsilon}}{A}$$

$$N_3 = \frac{-a + (e^a - 1)\varepsilon + ae^{-\varepsilon}}{A} \quad (42)$$

$$[K] = N_1 \times [K_{-1}] + N_2 \times [K_0] + N_3 \times [K_1] \quad (43)$$

$$(44)$$

$$\lambda^{(0)} = \frac{\{x\}^T \left(\frac{-e^{-1}}{A} [K_{-1}] + \frac{(e^{-1} - e^a + 1 + a)}{A} [K_0] + \frac{(e^a - 1 - a)}{A} [K_1] \right) \{x\}}{\{x\}^T \{x\}} \quad (45)$$

$$\lambda''(0) = \frac{\{x\}^T \left(\frac{1}{A} [K_{-1}] + \frac{(-1 - a)}{A} [K_0] + \frac{a}{A} [K_1] \right) \{x\}}{\{x\}^T \{x\}}$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon \lambda' + \frac{\varepsilon^2}{2} \lambda'' \quad (46)$$

$$\varepsilon = \frac{-\lambda' \pm \sqrt{(\lambda')^2 - 2\lambda\lambda''}}{\lambda''} \quad (47)$$

$$p_{cr} = N_1(\varepsilon_0) \times p_{-1} + N_2(\varepsilon_0) \times p_0 + N_3(\varepsilon_0) \times p_1 \quad (48)$$

$$a = \frac{p_0 - p_{-1}}{p_1 - p_0} \quad (49)$$

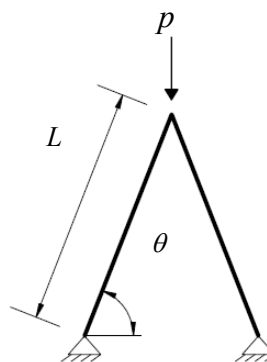
نمونه‌های عددی

در این بخش شماری سازه دو و سه بعدی تحلیل کمانشی می‌شوند. برای نشان دادن مشخصه‌های رابطه‌های پیشنهادی، پاسخ‌های این روش‌ها پیدا و باهم مقایسه خواهند شد نمونه‌های تحلیل شده، سازه‌های مشهوری



جدول (۳): مشخصه‌های عضوهای خرپای پل قوسی

شماره عضو	مساحت عضو (cm^2)
۱-۱۰ و ۳۵	۵۱/۶۱
۱۱ و ۱۲	۶۴/۵۲
۱۳-۱۶	۸۳/۸۷
۱۷ و ۱۸	۹۶/۷۷
۱۹-۲۲	۱۰۳/۲۳
۲۳ و ۲۴	۱۶۱/۲۹
۲۵ و ۲۶	۱۹۳/۵۵
۲۷ و ۲۸	۲۵۸/۰۶
۲۹-۳۲	۲۹۰/۳۲
۳۳ و ۳۴	۳۰۹/۶۸



شکل (۳): خرپای وان-میزز

جدول (۲): پاسخ‌های تحلیل کمانشی خرپای وان-میزز

بار بحرانی	روش
۵۷۷۰۹۱	۱
۵۷۷۱۲۶	۲
۵۷۷۰۹۶	۳
۵۷۷۰۸۷	۴
۵۷۵۱۶۳	دقیق

۲- خرپای پل قوسی

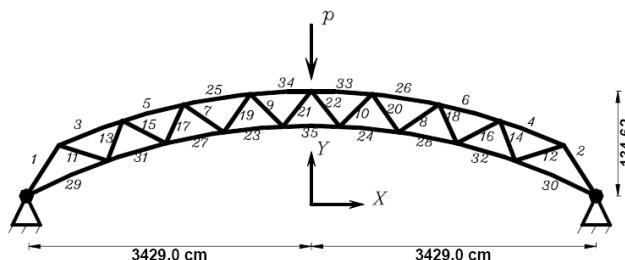
شکل (۴) این سازه را نشان می‌دهد. پل قوسی ۳۵ عضو و ۳۴ درجه آزادی دارد. این سازه با مشخصه‌های جداگانه برای هر عضو به وسیله پژوهشگران تحلیل شده است [19]. عامل کشسانی را برای این خرپا $E = 7.03 \times 10^7$ می‌پندارند. ویژگی‌های عضوهای این سازه در جدول (۳) می‌آید. نتیجه‌ی تحلیل کمانشی این سازه را جدول (۴) نشان می‌دهد. همانگونه که در این جدول مشخص است، با وجود نزدیکی پاسخ روش‌های گوناگون به یکدیگر، فن شماره (۲) (درونیابی با جمله Cos) دقت بیشتری نسبت به سایر روش‌ها دارد.

جدول (۴): پاسخ‌های تحلیل کمانشی خرپای پل قوسی

بار بحرانی	روش
۲۲۷۱.۷۳۲	۱
۲۲۴۸.۷۵	۲
۲۲۶۸.۵۳۷	۳
۲۲۷۴.۲۳۶	۴
۲۲۴۷.۳۶۰۲	دقیق

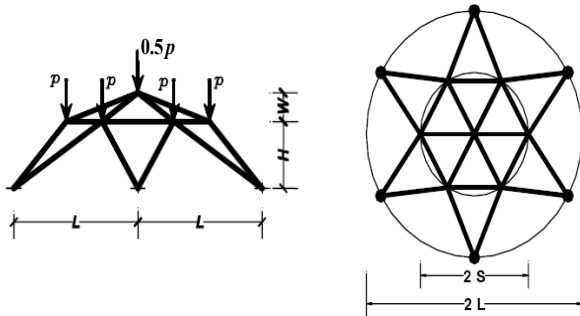
۳- خرپای سه عضوی مثلی

این سازه در شکل (۵) نشان داده شده است. به دلیل هندسه‌ی ساده‌ی این سازه، پاسخ دقیق آن را می‌توان یافت. در این سازه، $AE = 10000$ و $l = 1$ می‌باشند. جدول (۵) نتیجه‌های تحلیل کمانشی این سازه را نشان می‌دهد. به سان گذشته، تمامی روش‌ها پاسخ مناسبی دارند. آنگونه که از جدول مشخص می‌شود، روش (۳) (استفاده از جمله e^E) پاسخ بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد.



شکل (۴): خرپای پل قوسی

پیشنهادی جدید، استفاده از جمله e^E در درونیابی (فن شماره (۳)) دقت مناسبتری دارد.



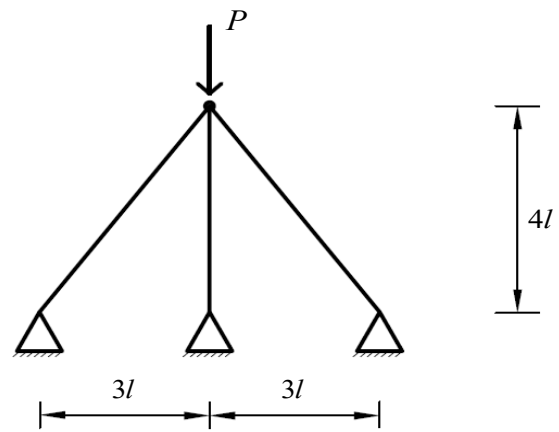
شکل (۶): خرپای طاق ستاره‌ای

جدول (۶): پاسخ‌های تحلیل کمانشی خرپای طاق ستاره‌ای

بار بحرانی	روش
۸.۶۴۲۶	۱
۸.۶۵۵۲	۲
۸.۶۴۵۹	۳
۸.۶۳۹۵	۴
۸.۶۴۳۶	دقیق

۵- پوسته‌ی یک انحنایی

آخرین نمونه‌ی عددی، پوسته‌ای یک انحنایی است که زیر یک بار متمرکز قرار دارد. این سازه تکیه گاه‌های گیردار دارد. برای تحلیل این سازه از ۲۴ جزء پوسته‌ای لاگرانژی ۹ گرهی استفاده خواهد شد. چون زاویه‌ی مقابل به قوس این سازه بسیار کوچک است، بار بحرانی آن به نقطه‌ی انشعاب ساده وابسته می‌شود. مشخصه‌های مکانیکی مواد این سازه به صورت $E = 3.10275$ می‌باشد. ضخامت پوسته برابر $t = 12.7$ است. تمام این مقادیر بدون بعد هستند. شکل (۷) هندسه‌ی این سازه را نشان می‌دهد. جدول (۷) نتیجه‌ی تحلیل کمانشی سازه را نمایش می‌دهد.



شکل (۵): خرپای سه عضوی مثلثی

جدول (۵): پاسخ‌های تحلیل کمانشی خرپای سه عضوی مثلثی

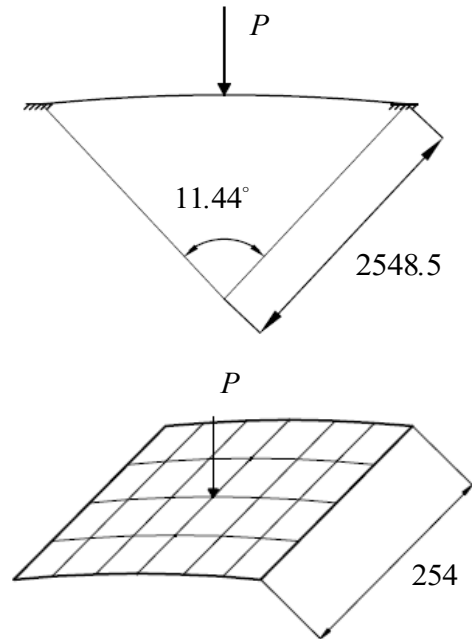
بار بحرانی	روش
۳۷۷۷.۴۳۸۲	1
۳۷۹۱.۴۲۳	2
۳۷۷۸.۸۸۸۸	3
۳۷۷۶.۲۵۲۳	4
۳۷۸۰.۷۲۸۳	دقیق

۴- خرپای طاق ستاره‌ای

این مثال خرپایی سه بعدی است که به دلیل رفتار پیچیده‌ی آن، بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته دارد [20,16]. این سازه در شکل (۶) نشان داده شده است. این سازه ۲۴ عضو و ۲۱ درجه‌ی آزادی دارد. بر روی این سازه ۷ بار نقطه‌ای وارد می‌آید. بزرگای بارهای هسته‌ی میانی، دو برابر بار نقطه‌ی وسط می‌باشد. مشخصه‌های خرپا بی‌بعد و برابر با $AE = 10^4$ ، $L = 43.3$ ، $S = 25$ ، $H = 6.216$ و $W = 2$ است. جدول (۶)، نتیجه‌ی تحلیل کمانشی سازه را نشان می‌دهد. آنگونه که مشخص است، راهکار درونیابی کوچکترین مقدار ویژه (روش شماره (۱)) بهترین پاسخ را دارد. از بین روش‌های



[1]-C.A. Felippa, Nonlinear Finite Element Methods, ASEN 5107, (SPRING 99)
 [2]-Gene H. Golub & C.F Van Loan, Matrix Computations, The John Hopkins University Press, (1989)
 [3]- M. Rezaiee-Pajand & H.R. Vejdani-Noghreiyani, "Computation of multiple bifurcation point", Engineering Computations, 23, 552-565, (2006)
 [4]-O. Ohtmer, "Nonlinear Adaptive Analysis Via Quasi-Newton Approach," Advanced in Engineering Software, 30, 595-605, (1999)
 [5]-Y.C. Toklu, "Nonlinear analysis of trusses through energy minimization", Computers and Structures, 82, 1581-1589, (2004)
 [6]-Mehdi Dehghan and Masoud Hajarian, "On some cubic convergence iterative formulae without derivatives for solving nonlinear equations", Communications In Numerical Methods In Engineering, (DOI: 10.1002/cnm.1328) , (2009)
 [7]-W.F. Chen & E.M. Lui, Stability Design of Steel Frames, (1991)
 [8]-Memon Bashir-Ahmed, SU Xiao-zu, "Arc-length technique for nonlinear finite element analysis", J Zhejiang University SCI , 5, 618-628, (2004)
 [9]- Michael Müller, "Passing of instability points by applying a stabilized Newton-Raphson scheme to a finite element formulation: Comparison to arc-length method", Comput Mech ,40, 683-705 , (2007)
 [10]- H. Saffari, M.J. Fadaee, M. ASCE & R. Tabatabaei, "Nonlinear Analysis of Space Trusses Using Modified Normal Flow Algorithm," Journal of Structural Engineering, ASCE, 134, 998-1005, (2008)
 [11]-M.A. Crisfield, Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol.1, (1991)
 [12]-C.C. Chang, "Periodically Restarted Quasi-Newton Updates in Constant Arc-Length Method," Computers & Structures, 41, 963-972, (1991)
 [13]-Y.T. Feng, D.Peric & D.R.J. Owen, "A New Criterion for Determination of Initial Loading Parameter in Arc-Length Methods," Computers & Structures, 58, 479-485, (1996)
 [14]-E.A. de Souza Neto & Y.T. Feng, "On the Determination of the Path Direction for Arc-Length methods in the Presence of Bifurcation and 'Snap-Backs'," Computer Methods Applied in Mechanics and Engineering, 179, 81-89, (1999)
 [15]-Masahisa Fugicake, "A Simple Approach to Bifurcation and Limit Point Calculation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, 183-191, (1985)
 [16]-Kiyohiro Ikeda, Kazuo Murota, Akito Yanagimoto & Hirohisa Noguchi,



شکل (۷): پوسته‌ی یک انحنايي

جدول (۷): پاسخ‌های تحلیل کماتشی پوسته‌ی یک انحنايي

بار بحرانی	روش
1.1235	۱
1.1235	۲
1.1225	۳
1.1252	۴
1.1252	دقیق

نتیجه گیری

در این مقاله از چند تابع برای درونیابی ماتریس سختی مماسی استفاده شد. پس از درونیابی با بهره جویی از راهکارهای ریاضی، رابطه‌ای برای یافتن بار بحرانی پیشنهاد شد. کارایی رابطه‌های پیشنهادی با استفاده از نمونه‌های عددی بررسی شد. نمونه‌های تحلیل شده، خرپاهای دو و سه بعدی و همچنین یک پوسته‌ی سه بعدی با رفتار پیچیده بودند. بررسی‌ها نشان داد تمامی رابطه‌ها دقت مناسبی دارند. اما استفاده از جمله e^E دقت بهتری نسبت به سایر تابع‌ها دارد. می‌توان به همین شیوه تابع‌های درونیاب دیگری را نیز به کار برد و به دقت مناسبتری دست یافت.

"Improvement of the Scaled Corrector Method for Bifurcation Analysis Using Symmetry-Exploiting Block-Diagonalization," Computer Methods Applied in Mechanics and Engineering, 196, 1648-1661, (2007)

[17]-E. Issacson & H.B. Keller, "Analysis of Numerical Methods", John Wiley & Sons, (1966)

[18]-Crisfield, M.A. "Non-Linear Finite Element Analysis Of Solids And Structures, Vol.2, (2000).

[19]-Eginio, O., William T., M. , "A Critical Displacement Approach for Predicting Structural Instability," Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg, 134,135-161, (1996).

[20]-Kani, I.M & Heidari, A. "Automatic two-stage calculation of bifurcation path of perfect shallow reticulated domes" , Journal of structural engineering, ASCE, 133(2), 185-194, (2007)

