



# تحلیل تیرهای باربر فولادی سرد نورد شده تحت خمش و نیروی محوری متغیر

\* معصومه سلطانی<sup>۱</sup>، مازیار پشتدار<sup>۲</sup>، بهروز عسگریان<sup>۳</sup>  
(تاریخ دریافت: ۹۴/۰۷/۲۵، تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۴/۰۱)

## چکیده

در این مقاله پایداری تیرهای مایل با مقاطع سرد نورد شده تحت بارهای ثقلی با تکیه‌گاه الاستیک در برابر کمانش جانبی بررسی می‌گردد. بدین منظور در مرحله نخست، براساس تئوری والسو تغییر شکل‌های حاکم بر یک تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن تعریف گردیده است. سپس معادلات دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر تعادل کمانش الاستیک جانبی تیر مذکور با سطح مقطع ثابت تحت بارهای خمشی خارج از مرکز و بار محوری متغیر، با ایستادن نمودن انرژی پتانسیل کلی حاکم بر تیر جدار نازک که شامل انرژی کرنشی، انرژی ذخیره شده در فنر الاستیک بستر تیر و کار خارجی است، تعیین می‌شوند. در ادامه، دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاصل شده با استفاده از روش بسط سری‌های توانی حل می‌گردد. بدین ترتیب که فرم تغییر شکل حاکم بر تیر مایل به صورت یک سری توانی با جملات نامتناهی در نظر گرفته شده است. سپس، با استفاده از روش حل مقادیر ویژه مقدار بار بحرانی کمانش الاستیک محاسبه می‌شود. در پایان، چند نمونه مثال عددی شامل تحلیل کمانش جانبی تیر مایل با شیب‌های مختلف با در نظر گرفتن اثر مهار جانبی جزئی و کامل بر مقادیر بار بحرانی کمانشی ارائه گشته است و نتایج به دست آمده از روش مذکور با مقادیر محاسبه شده توسط روش‌های عددی، تحلیلی و یا اجزای محدود موجود مقایسه شده‌اند.

## کلمات کلیدی

تیر مایل، مقطع سرد نورد شده، کمانش جانبی، تکیه‌گاه الاستیک، نیروی محوری متغیر

## Stability Analysis of Cold-Formed Steel Rafters Subjected to Bending and Varying Axial Loads

M. Soltani, M. Poshtdar, B. Asgarian

### ABSTRACT

In this paper, the lateral-torsional and distortional buckling stability of rafters with elastic supports subjected to gravity loads have been studied by means of a numerical method. To fulfill this purpose, the equilibrium equations for elastic rafter members with linear behavior are derived from the stationary condition of the total potential energy. In the applied energy method, effects of initial stresses and load eccentricities from centroid of cold-formed cross-sections are also considered. The Power series expansions are utilized to solve the fourth-order differential equations of considered rafters with variable coefficients. According to aforementioned method, displacements components and geometric properties are approximated by power series form with a known degree. The critical buckling loads are then derived by solving the eigenvalue problem. In order to present the accuracy of the proposed method, several numerical examples including lateral-torsional behavior and distortional buckling analysis of rafters with cold-form sections are considered. The evaluated results are compared to the finite element simulations and other available methods.

### KEYWORDS

Rafter, Lateral-torsional buckling, Distortional buckling, Cold-formed sections, Elastic support

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه کاشان، msoltani@kashanu.ac.ir (نویسنده مسئول)

۲- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۳- استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی



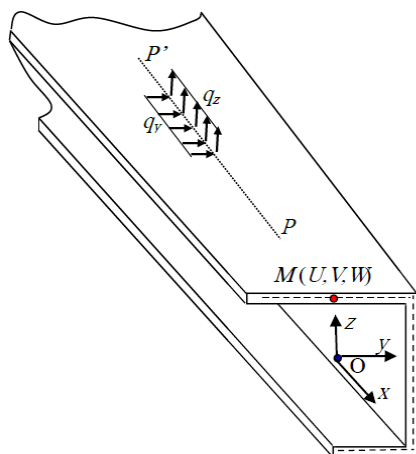
امروزه استفاده از سیستم سازه‌ای قاب سبک فولادی در صنعت ساختمان‌سازی بدلیل مزایایی همچون سرعت اجرا، سبکی، نسبت مقاومت به وزن مناسب و سهولت نصب و اجرا رو به رشد است. سقف ساختمان‌های دارای سیستم قاب سبک فولادی معمولاً شامل پانل‌ها و تیرهایی است که وظیفه باربری و ایجاد سطوح مناسب برای پوشش و یا کاربری طبقات بالاتر را بر عهده دارند. سقف را می‌توان به صورت پانل‌های آماده ساخته شده از مصالح چوبی، ورق‌های فولادی سرد نورد شده با عایق‌بندی مناسب در برابر صوت و حرارت (نظیر ساندویچ پانل‌ها) و یا عرشه‌های فولادی سرد نورد شده در ترکیب با بتن ساخت. تیرهایی که در سقف ساختمان‌های شامل سیستم سازه‌ای قاب سبک فولادی به کار می‌روند را می‌توان به موازات شیب سقف نصب نمود. سقف شامل تیرهای مایل و پانل‌های باربری است که توسط پیچ به تیر مایل متصل می‌شوند. نحوه بارگذاری در این سیستم نوع خاصی از اعضای سازه‌ای را نتیجه می‌دهد که لازم است رفتار آن با دقت بیشتری مورد بازبینی قرار گیرد. این عضو تیری است که تحت نیروی محوری متغیر قرار داشته و بر بستری الاستیک تکیه دارد. بدلیل استفاده از مقاطع سرد نورد شده فولادی در این اعضا، ممکن است تحت بارهای وارده مقطع و عضو دچار مودهای شکستی همچون کمناش موضعی، کمناش جانبی و کمناش اعوجاجی گردند. در این مقاله هدف بررسی کمناش جانبی تیر مایل با تکیه‌گاه الاستیک تحت خمش و نیروی محوری متغیر است.

پس از ارائه تئوری رفتار کمناشی تیرهای جدارنازک توسط Timoshenko و Gere [۱]، تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه کمناش جانبی-پیچشی مقاطع جدارنازک صورت گرفته است. تحقیقات پیشین بیشتر روی رفتار کمناشی اعضای منفرد تمرکز داشته‌اند. همچنین اثر مقاومت پانل‌های متصل به پرلین‌ها یا به صورت مهار جانبی کامل فرض می‌شد و یا کلاً از اثر مهاری آن‌ها صرف نظر می‌شد. اولین بار توسط Lau و Hancock [۲] در سال ۱۹۸۷ یک حل تحلیلی برای کمناش اعوجاجی مقطع جدارنازک تحت

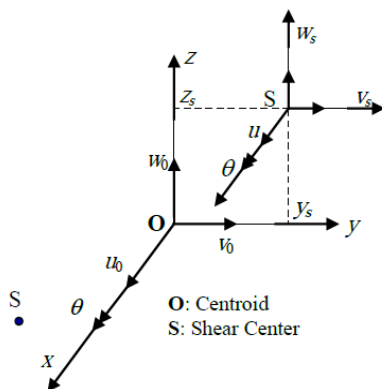
فشار محوری ارائه شد. البته پیش از آن تئوری رفتار صلب‌گونه مقاطع جدارنازک در کمناش جانبی-پیچشی توسط تیموشنکو و گر توسعه یافته بود. هنکوک [۳] در سال ۱۹۹۷ کمناش اعوجاجی تیرهای تحت لنگر ثابت را مورد بررسی قرار داد. Teng و همکارانش [۴] در سال ۲۰۰۳ روش حلی برای کمناش اعوجاجی تیرهای تحت فشار محوری و خمش دومحوره ارائه نمودند. این تحقیق را می‌توان توسعه یافته روش هنکوک و لائو، از یک تیر تحت فشار محوری به تیری تحت فشار محوری و خمش دو محوره دانست. در سال ۲۰۰۴ Ye و همکارانش [۵] روشی جهت آنالیز پرلین‌های تا حدی مهار شده ارائه نمودند. تمرکز این تحقیق روی اثر سختی تأمین شده توسط پانل‌ها بر رفتار کمناشی عضو بود. Li [۶] در سال ۲۰۰۴ روشی جهت محاسبه بار کمناشی پرلین‌های فولادی سرد نورد شده با مقطع Z شکل و تا حدی مهار شده با پانل ارائه داد. در این تحقیق تمرکز روی اثر مهار تأمین شده توسط پانل متصل به پرلین بر کمناش جانبی-پیچشی عضو بود. همچنین در روش ارائه شده اثر میل‌مهاری متصل به پرلین را نیز می‌توان در محاسبات بار کمناشی وارد نمود. Chu و همکارانش [۷] در سال ۲۰۰۴ روشی جهت محاسبه بار کمناشی پرلین‌های فولادی سرد نورد شده با مقطع C شکل و تا حدی مهار شده با پانل ارائه دادند. در این تحقیق تمرکز روی تأثیر مهار تأمین شده توسط پانل متصل به پرلین بر کمناش جانبی-پیچشی عضو بود. همچنین در روش ارائه شده می‌توان اثر میل‌مهاری متصل به پرلین را نیز در محاسبات بار کمناشی وارد نمود. Li و Chen [۸] در سال ۲۰۰۸ روشی مشابه روش Lau و Hancock [۲] ارائه نمودند، با این تفاوت که علاوه بر اثر سختی پیچشی اتصال بال به جان، رفتار خمشی بال را در محاسبات در نظر گرفتند. در رابطه با کمناش اعوجاجی لازم است رفتار تیر با تکیه‌گاه الاستیک تحت خمش و نیروی محوری متغیر بررسی شود. Li [۹] در سال ۲۰۱۲ روشی جهت آنالیز پرلین‌های تا حدی مهار شده با مقطع Z شکل و تحت نیروهای بالابرنده بدست آوردند. در مدل پیشنهادی اخیر پرلین در برابر انتقال جانبی کاملاً مهار شده



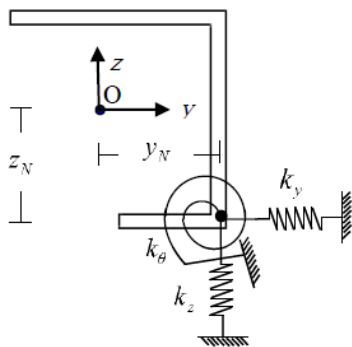
ممان‌های خمشی  $M_z$  و  $M_y$  خارجی بر روی سطح مقطع عضو می‌گردند.



الف) تیر جدار نازک با مقطع نامتقارن



ب) سیستم مختصات و نمادهای پارامترهای تغییر مکان‌های تیر



ج) مقطع تیر منکی بر بستر الاستیک

شکل (۱): تیر جدار نازک و دستگاه مختصات حاکم بر آن

مصالح استفاده شده در عضو مورد نظر با سطح مقطع نامتقارن، همگن و ایزوتروپیک می‌باشند و از قانون هوک پیروی می‌کنند. طول تیر مد نظر در مقایسه با ابعاد سطح مقطع بسیار بزرگ‌تر است و عضو کاملاً مستقیم و بدون

و در برابر چرخش تا حدی مهار شده فرض گردیده است. در رابطه با کمانش جانبی-پیچشی لازم است رفتار تیر با تکیه‌گاه الاستیک تحت خمش و نیروی محوری متغیر بررسی شود.

در این مقاله، جهت بررسی پایداری تیرهای مایل سقف ساختمان‌های شامل سیستم سازه‌ای قاب سبک فولادی، تغییر شکل‌های حاکم بر یک تیر جدار نازک بر اساس تئوری کلاسیک تیرهای جدار نازک والسو تعریف گردیده است. در ادامه با استفاده از حداقل نمودن انرژی پتانسیل کل سیستم، معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم تعادل حاکم بر عضو جدار نازک بدست می‌آید. دستگاه معادلات دیفرانسیل بدست آمده کوپل هستند و حل آن به منظور تعیین مقادیر بار بحرانی کمانش به سادگی امکان پذیر نمی‌باشد. استفاده از بسط سری‌های توانی یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای حل چنین معادلاتی با ضرایب متغیر است. به منظور حل، کلیه ضرایب متغیر دخیل در معادله دیفرانسیل و همچنین فرم تغییر شکل تیر جدار نازک مذکور به صورت یک سری توانی متناهی در نظر گرفته می‌شود. در پایان، با جایگذاری شرایط مرزی (دو شرط برای هر انتهای عضو) و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار بار کمانشی جانبی تیر تعیین می‌گردد. همچنین جهت ارزیابی روش عددی معرفی شده برای حل معادلات بدست آمده، طی چند مثال مختلف، نتایج بدست آمده از روش مذکور با نتایج حاصل از روش‌های عددی و تحلیلی موجود مقایسه شده است. با مشاهده نتایج حاصل شده می‌توان از دقت و توانایی روش عددی مذکور اطلاع یافت.

۲- تعیین معادله دیفرانسیل و انرژی پتانسیل حاکم بر تیر با قطع سرد نورد شده

## ۱-۲- سینماتیک

یک تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن مطابق شکل (۱-الف) که تحت بارگذاری جانبی  $q_y$  و  $q_z$  در راستای دو محور عمودی و جانبی  $y$  و  $z$  قرار دارد، مد نظر است. دو بار گسترده خمشی مذکور منجر به وارد شدن

غیرخطی را مطابق با تانسور کرنش گرین محاسبه نمود. مولفه‌های کرنش گرین با در نظر گرفتن اثرات تغییر مکان‌های بزرگ به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^* \quad (9)$$

در  $\varepsilon_{ij}^*$  و  $\varepsilon_{ij}^1$  جملات خطی و غیر خطی کرنش می‌باشند. در مورد تیرهای جدار نازک، مولفه‌های تانسور کرنش به موارد زیر کاهش می‌یابند:

$$\varepsilon_{xx} \approx U' + \frac{1}{2}(V'^2 + W'^2) = \varepsilon_{xx}^1 + \varepsilon_{xx}^* \quad (10)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \varepsilon_{xy}^1 + \varepsilon_{xy}^* \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \varepsilon_{xz}^1 + \varepsilon_{xz}^* \quad (12)$$

با استفاده از معادلات (۶) تا (۸)، مولفه‌های خطی و غیرخطی کرنش برای یک تیر جدارنازک به صورت زیر قابل تعیین می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx}^1 = u_0' - y(v_s'' + z_s \theta'') - z(w_s'' - y_s \theta'') - \phi \theta'' \quad (13)$$

$$\gamma_{xy}^1 = 2\varepsilon_{xy}^1 = - \left( z + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \theta' \quad (14)$$

$$\gamma_{xz}^1 = 2\varepsilon_{xz}^1 = \left( y - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \theta' \quad (15)$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{1}{2} [v_s'^2 + w_s'^2 + r^2 \theta'^2] + (y - y_s) w_s' \theta' - (z - z_s) v_s' \theta' \quad (16)$$

$$\gamma_{xy}^* = (w_s' + \theta'(y - y_s)) \theta \quad (17)$$

$$\gamma_{xz}^* = -(v_s' + \theta'(z_s - z)) \theta \quad (18)$$

و همچنین

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_{yy}^* = \varepsilon_{zz}^* = \gamma_{yz}^* = 0 \quad (19)$$

در (۱۶)، جمله  $r^2$  بیانگر فاصله نقطه M تا مرکز سطح است:

$$r^2 = (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \quad (20)$$

هیچ گونه نقص اولیه فرض گردیده است. بنابراین، تغییر شکل‌ها بسیار کوچک هستند و از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر می‌گردد. شکل (۱-ب) نشان دهنده پارامترهای تغییر شکل تعریف شده بر روی سطح مقطع تیر مد نظر در راستای محورهای اصلی و مرکزی x، y و z می‌باشد. U، V، W و  $\theta$  چهار مؤلفه تغییر شکل محوری، جانبی و دورانی هستند. سه مولفه تغییر مکان نسبی نقطه دلخواه M واقع بر نیمرخ تیر که شامل یک تغییر شکل محوری و دو مولفه تغییر مکان جانبی نسبت به O (مرکز سطح مقطع عضو) است به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$U(x, y, z) = u_0(x) - y \frac{\partial(v_s(x) + z_s \theta(x))}{\partial x} - z \frac{\partial(w_s(x) - y_s \theta(x))}{\partial x} - \omega(y, z) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v_0(x) - z \theta(x) \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = w_0(x) + y \theta(x) \quad (3)$$

در رابطه فوق U تغییر شکل محوری است. مولفه‌های تغییر مکان V و W نشان دهنده تغییر مکان‌های جانبی و عمودی (در جهت y و z) هستند.  $\phi(y, z)$  تابع پیچش است که براساس تئوری سنت ونان بر روی سطح مقطع تعریف می‌گردد. دو مولفه تغییر مکان جانبی و عمودی در مرکز سطح را می‌توان با مولفه‌های تغییر شکل در مرکز برش S جایگزین نمود:

$$v_0(x) = v_s(x) + z_s \theta(x) \quad (4)$$

$$w_0(x) = w_s(x) - y_s \theta(x) \quad (5)$$

با جایگذاری دو مولفه تغییر شکل ارائه شده در روابط فوق در معادلات (۱) تا (۳) خواهیم داشت:

$$U(x, y, z) = u_0(x) - y \frac{\partial(v_s(x) + z_s \theta(x))}{\partial x} - z \frac{\partial(w_s(x) - y_s \theta(x))}{\partial x} - \omega(y, z) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (6)$$

$$V(x, y, z) = v_s(x) - (z - z_s) \theta(x) \quad (7)$$

$$W(x, y, z) = w_s(x) + (y - y_s) \theta(x) \quad (8)$$

در تحلیل پایداری تیر جدار نازک، بایستی مولفه‌های تانسور کرنش با در نظر گرفتن جملات کرنش خطی و



$U_f$  و کار انجام شده ناشی بارهای موثر وارد بر عضو  $W$  می‌باشد.

به منظور تحلیل پایداری، انرژی کرنشی الاستیک تیر به دو قسمت که یکی شامل مولفه‌های کرنش خطی و دیگری دربرگیرنده مولفه‌های تنش اولیه است، تقسیم گشته است. در قسمت الاستیک خطی خواهیم داشت:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \tau_{ij} \varepsilon_{ij} dA dx \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (E \varepsilon_{xx}^2 + G \gamma_{xy}^2 + G \gamma_{xz}^2) dA dx$$

با استفاده از روابط (۱۳) تا (۱۵) که مربوط به مولفه‌های کرنش خطی هستند و با انتگرال گیری بر روی سطح مقطع عضو، رابطه زیر برای  $U_1$  حاکم بر تیر با مقطع ثابت بدست می‌آید:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_L (EA u_0'^2 + EI_z v_s'^2 + EI_y w_s'^2 + EI_\phi \theta'^2 + GJ \theta'^2) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_L EI_y (y_s^2 \theta'^2 - 2y_s w_s' \theta') dx \quad (25)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_L EI_z (z_s^2 \theta'^2 + 2z_s v_s' \theta') dx$$

$$+ \int_L EI_{y\phi} (v_s' \theta' + z_s \theta'^2) dx + \int_L EI_{z\phi} (w_s' \theta' - y_s \theta'^2) dx$$

در معادله فوق،  $A$  مساحت نیمرخ جدار نازک است و  $I_y$  و  $I_z$  بیانگر ممان اینرسی سطحی هستند.  $J$  و  $I_\phi$  به ترتیب ثابت‌های پیچش سن ونان و تابیدگی هستند. براساس قوانین حاکم بر انتگرال گیری نسبت به محورهای اصلی، خصوصیات هندسی یک مقطع جدار نازک به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$A = \int_A dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA,$$

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_\phi = \int_A \phi^2 dA \quad (26)$$

$$J = \int_A \left( (y - \frac{\partial \phi}{\partial z})^2 + (z + \frac{\partial \phi}{\partial y})^2 \right) dA,$$

$$I_{y\phi} = \int_A y \phi dA, \quad I_{z\phi} = \int_A z \phi dA$$

مطابق با اصول حاکم بر مدل والسو، دو مولفه عمودی و جانبی مختصات مرکز برش به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$z_s = -\frac{I_{y\phi}}{I_z}, \quad y_s = \frac{I_{z\phi}}{I_y} \quad (27)$$

به طوری که  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $\gamma_{ij}$ , کرنش‌های خطی و غیرخطی متناسب با مولفه‌های تغییر شکل  $U$ ,  $V$  و  $W$  هستند.

مصالص مصرفی همگن و ایزوتروپیک می‌باشند. با فرض آنکه  $E$  و  $G$  خصوصیات مصالح الاستیک هستند، مولفه‌های تنش به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \\ G \\ G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

تحت شرایط خاص کماتش جانبی زمانی که تیر تحت بار محوری فشاری  $N$ ، لنگرهای خمشی اولیه  $M_y$  و  $M_z$  و نیروهای برشی  $V_y$  و  $V_z$  قرار دارد، تنش‌های اولیه روی سطح مقطع به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad (22)$$

$$\tau_{xy}^0 = \frac{V_y}{A}, \quad \tau_{xz}^0 = \frac{V_z}{A}$$

در رابطه فوق،  $\sigma_{xx}^0$  بیانگر تنش عمودی سطح مقطع است.  $\tau_{xz}^0$  و  $\tau_{xy}^0$  معرف تنش برشی میانگین هستند.

## ۲-۲- تعیین معادلات تعادل الاستیک

در این قسمت از اصل انرژی پتانسیل کلی به منظور تعیین معادلات تعادل تیر جدار نازک استفاده شده است. طبق این اصل، از میان تمام حالات تغییر شکل یافته سازه که سازگاری و شرایط مرزی را برآورده می‌کنند، آن دسته از تغییر مکان‌ها شرایط تعادل را برآورده می‌کنند که به ازای آن‌ها انرژی پتانسیل ایستا باشد. مقدار ساکن می‌تواند حداقل، حداکثر و یا یک نقطه ختشی باشد. وقتی که مقدار انرژی حداقل باشد، سیستم حالت پایدار خواهد داشت. برای یک محیط پیوسته، شرط حداقل شدن انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi = \delta(U + U_f - W) = 0 \quad (23)$$

در رابطه فوق  $\Pi$  نشان دهنده انرژی پتانسیل کل سیستم الاستیک می‌باشد. این انرژی برابر مجموع انرژی کرنشی کلی  $U$ ، انرژی الاستیک خطی ناشی از اثرات بستر الاستیک



با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۲۵)، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_L (EAu_0'^2 + EI_z v_s''^2 + EI_y w_s''^2 + EI_\theta \theta''^2 + GJ\theta'^2 - EI_y z_s^2 \theta'^2 - EI_z z_s^2 \theta'^2) dx \quad (28)$$

با استفاده از روابط حاکم بر کرنش‌های غیرخطی و تنش‌های اولیه، انرژی کرنشی ناشی از تنش به صورت زیر قابل تعریف است:

$$U_0 = \iint_A \tau_{ij} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^0) dA dx = \iint_A (\sigma_{xx}^0 \epsilon_{xx}^* + \tau_{xy}^0 \gamma_{xy}^* + \tau_{xz}^0 \gamma_{xz}^*) dA dx \quad (29)$$

با جایگذاری روابط کرنش-تغییر مکان غیرخطی ارائه شده در معادلات (۱۶) تا (۱۸) و همچنین تنش‌های اولیه در رابطه فوق، و با انتگرال گیری بر روی سطح مقطع، رابطه زیر براساس ممان‌های خمشی وارده ( $M_z$  و  $M_y$ ) و نیروی محوری  $N$  بدست خواهد آمد:

$$U_0 = \int_L \left( \frac{N}{2} (v_s'^2 + w_s'^2 + r_s^2 \theta'^2 + 2z_s \theta' v_s' - 2y_s \theta' w_s') - M_z w_s' \theta' + M_y v_s' \theta' - M_z' w_s' \theta + M_y' v_s' \theta - \frac{1}{2} M_z'' y_s \theta^2 - \frac{1}{2} M_y'' z_s \theta^2 - \frac{1}{2} (\beta_y M_z + \beta_z M_y) \theta'^2 \right) dx \quad (30)$$

که در آن،  $\beta_y$  و  $\beta_z$  ثابت‌های واگنر هستند و معادلات آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\beta_z = \frac{1}{I_z} \left( \iint_A y (y^2 + z^2) dA \right) - 2z_s \quad (31)$$

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \left( \iint_A z (y^2 + z^2) dA \right) - 2y_s$$

در رابطه (۳۰) از رابطه هندسی زیر نیز استفاده شده است:

$$r_s^2 = \frac{I_y}{A} + \frac{I_z}{A} + y_s^2 + z_s^2 \quad (32)$$

انرژی ذخیره شده در سیستم ناشی از تکیه‌گاه الاستیک با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L (k_y v_N^2 + k_z w_N^2 + k_\theta \theta^2) dx \quad (33)$$

در رابطه فوق،  $k_y$ ،  $k_z$  و  $k_\theta$  معرف ضریب ارتجاعی فنرهای معادل سختی پانل درگیر با تغییر مکان عمودی، جانبی و دورانی سطح مقطع تیر مصور در شکل (۱-ج) در نقطه  $N$

است. مطابق با معادلات تغییر شکل ارائه شده در (۴) و (۵)، مولفه تغییر مکان عمودی و جانبی در نقطه  $N$  یا همان محل اتصال فنر به نیمرخ تیر، به صورت ذیل می‌باشد:

$$w_N = w_s + h_y \theta, \quad v_N = v_s - h_z \theta \quad (34)$$

در رابطه فوق:

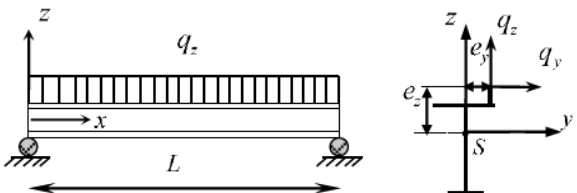
$$h_z = z_N - z_s, \quad h_y = y_N - y_s \quad (35)$$

با جایگذاری روابط (۳۴) و (۳۵) در معادلات انرژی ذخیره شده ناشی از فنر الاستیک خطی و انتگرال گیری بر روی سطح مقطع عضو نسبت به محورهای اصلی خمش و پیچش، معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L (k_y v_s^2 - 2k_y h_z v_s \theta + k_y h_z^2 \theta^2 + k_z w_s^2 + 2k_z h_y v_s \theta + k_z h_y^2 \theta^2 + k_\theta \theta^2) dx \quad (36)$$

در بحث کمانش جانبی، نیروهای وارده بر عضو جدار نازک به بارهای جانبی وارده شامل  $p_y$  و  $p_z$  به ترتیب در جهت  $y$  و  $z$  در طول خط  $(pp')$  بر روی دامنه سطح مقطع عضو وارد می‌گردند (شکل (۲)). کار خارجی ناشی از بارها به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$W = \int_0^L (q_y v_p(x) + q_z w_p(x)) dx \quad (37)$$



شکل (۲): یک تیر جدار نازک تحت بارهای خمشی جانبی

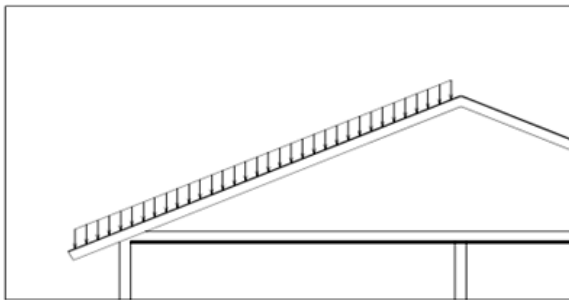
( $q_y$  و  $q_z$ ) و پارامتر خروج از مرکزیت بار ( $e_y$  و  $e_z$ )

به منظور در نظر گرفتن اثرات خروج از مرکزیت و ارتفاع محل بارگذاری که در تحلیل پایداری جانبی حائز اهمیت هستند، دو مولفه تغییر مکان عمودی و جانبی سطح مقطع ( $w_p$  و  $v_p$ ) منطبق با تغییر مکان نقطه  $P$  یا همان محل اثر بار، براساس فرضیات سینماتیک غیرخطی معرفی شده در [۱۲] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$w_p = w_s + e_y \theta - e_z \frac{\theta^2}{2}, \quad v_p = v_s - e_z \theta - e_y \frac{\theta^2}{2} \quad (38)$$



فولادی (LSF) به کار می‌روند را می‌توان به موازات شیب سقف نصب نمود. بارهای ثقلی (q) وارد بر اینگونه سقف‌ها که شامل بار مرده ناشی از سقف‌سازی و اعضای برابر آن و بار زنده نظیر بار برف هستند را می‌توان به دو مؤلفه نیروی قائم بر سطح (p<sub>z</sub>) و نیروی موازی با سطح (N) در راستای شیب با افق (α) تجزیه نمود. هر دو مؤلفه منتجه از بارگذاری خارجی از مرکز برش (S) سطح مقطع تیر عبور می‌کنند. بار باد به صورت قائم بر سطح برابر فرض می‌شود. در شکل (۳) نحوه بارگذاری ثقلی نمایش داده شده است.



شکل (۳): تیر مایل تحت بارگذاری ثقلی

بنابراین، برای یک تیر جدار نازک مایل تحت بار گسترده ثقلی می‌توان روابط زیر را برای بارگذاری‌ها و لنگر خمشی در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} N &= q \sin \alpha (l-x), \quad q_z = q \cos \alpha (l-x) \\ M_y &= q \cos \alpha \left( \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} \right) \\ M_z &= 0, \quad M_t = 0, \quad \hat{M}_t = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

که در این روابط α زاویه شیب عضو با سطح افق، l طول عضو و q بار گسترده خطی وارده به عضو در راستای ثقل است. بنابراین، معادلات تعادل به صورت زیر مرتب می‌گردند:

$$\begin{aligned} EI_z \frac{d^4 v_s}{dx^4} + (q \cos \alpha) \theta - 2q \cos \alpha \left( \frac{1}{2} - x \right) \frac{d\theta}{dx} \\ - q \cos \alpha \left( \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} \right) \frac{d^2 \theta}{dx^2} - q \sin \alpha (l-x) \frac{d^2 v_s}{dx^2} \\ + q \sin \alpha \frac{dv_s}{dx} - z_s q \sin \alpha (l-x) \frac{d^2 \theta}{dx^2} \\ + z_s q \sin \alpha \frac{d\theta}{dx} + k_y (v_s - h_z \theta) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

به منظور ساده سازی روابط فوق و برای نشان دادن مقدار خروج از مرکزیت بارهای جانبی نسبت به مرکز برش از پارامترهای (e<sub>y</sub> و e<sub>z</sub>) استفاده شده است. با استفاده از (۳۷) خواهیم داشت:

$$W = \int_L \left( q_y v_s + q_z w_s + \hat{M}_t \theta - \frac{1}{2} M_t \theta^2 \right) dx \quad (39)$$

در رابطه فوق، M<sub>t</sub> و  $\hat{M}_t$  لنگرهای پیچشی مرتبه اول و دوم ناشی از خروج از مرکزیت بارهای خمشی هستند که به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\hat{M}_t = q_z e_y - q_y e_z, \quad M_t = q_y e_y + q_z e_z \quad (40)$$

در حالتی که تیر مذکور با سطح مقطع ثابت تحت بار محوری متغیر N و لنگر خمشی متغیر در طول خود قرار دارد، با استفاده از رابطه (۲۳) و با مشتق‌گیری نسبت به u<sub>0</sub>، v<sub>s</sub>، w<sub>s</sub> و θ، دستگاه معادلات دیفرانسیل پایداری حاکم بر تیر جدار نازک با مقطع سرد نورد شده نامتقارن به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$(EAu_0')' + \rho \omega^2 Au_0 = 0 \quad (41)$$

$$EI_z v_s'''' - (M_y \theta)'' - (N(v_s + z_s \theta))' + k_y (v_s - h_z \theta) = q_y \quad (42)$$

$$EI_z w_s'''' + (M_z \theta)'' - (N(w_s - y_s \theta))' + k_z (w_s + h_y \theta) = q_z \quad (43)$$

$$\begin{aligned} EI_\phi \theta'''' - GJ \theta'' + M_z w_s'' - M_y v_s'' \\ - M_z'' y_s \theta(x) - M_y'' z_s \theta(x) \\ + ((\beta_z M_y + \beta_y M_z) \theta') - r_s^2 (N \theta)' \\ - z_s (N v_s') + y_s (N w_s') - k_y h_z (v_s - h_z \theta) \\ + k_z h_y (w_s + h_y \theta) + k_\theta \theta = \hat{M}_t - M_t \theta(x) \end{aligned} \quad (44)$$

در (۴۴)، I<sub>φ</sub> = I<sub>φ</sub> - y<sub>c</sub><sup>2</sup>I<sub>z</sub> - z<sub>c</sub><sup>2</sup>I<sub>y</sub> قرار داده شده است.

در تحلیل پایداری، معادله تعادل حاکم بر تغییر شکل محوری بر روی رفتار جانبی اثر گذار نیست. معادله یاد شده هیچگونه اثر و دخالتی بر روی تحلیل مد نظر ما ندارد، بنابراین در مراحل تحلیل پایداری به معادله دیفرانسیل یاد شده نیازی نمی‌باشد.

همانگونه که پیش از این ذکر شد، تیرهای مایلی که در سقف ساختمان‌های شامل سیستم سازه‌ای قاب سبک

$$w_s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad (50)$$

$$\theta(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (51)$$

همچنین معادله بار متغیر صورت یک سری توانی مطابق با رابطه ذیل تعریف شده است:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i^* x^i \quad (52)$$

در ادامه، با استفاده از سری‌های پیشنهاد به عنوان جواب با ضرب جمله به جمله هر دو سری و با توجه به قانون جمع و ضرب پارامتریک حاکم بر سری‌های توانی، روابط ذیل حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned} EI_z \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)(i+3)(i+4) a_{i+4} x^i \right) \\ + \frac{q}{2} \cos \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) c_i x^i \right) \\ - q \frac{1}{2} \cos \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) c_{i+1} x^i \right) \\ + q \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+1) a_{i+1} x^i \right) \\ - ql \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) a_{i+2} x^i \right) \\ + qz_s \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+1) c_{i+1} x^i \right) \\ - qz_s l \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) c_{i+2} x^i \right) \\ + k_y \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - h_z \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} EI_y \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)(i+3)(i+4) b_{i+4} x^i \right) \\ + q \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+1) b_{i+1} x^i \right) \\ - ql \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) b_{i+2} x^i \right) \\ - qy_s \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+1) c_{i+1} x^i \right) \\ + qy_s l \sin \alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) c_{i+2} x^i \right) \\ + k_z \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i + h_y \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) \\ - \sum_{i=0}^{\infty} q_i^* x^i = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} EI_y \frac{d^4 w_s}{dx^4} - q \sin \alpha (1-x) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ + q \sin \alpha \frac{dw_s}{dx} + y_s q \sin \alpha (1-x) \frac{d^2 \theta}{dx^2} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} - y_s q \sin \alpha \frac{d\theta}{dx} + k_z (w_s + h_z \theta) = Q \\ EI_y \frac{d^4 \theta}{dx^4} - GI \frac{d^2 \theta}{dx^2} - q \cos \alpha \left( \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) \frac{d^2 v_s}{dx^2} \\ + z_s q \cos \alpha \theta + \beta_z q \cos \alpha \left( \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) \frac{d^2 \theta}{dx^2} \\ + \beta_z q \cos \alpha \left( \frac{1}{2} x - x \right) \frac{d\theta}{dx} - r_s^2 q \sin \alpha (1-x) \frac{d^2 \theta}{dx^2} \\ + r_s^2 q \sin \alpha \frac{d\theta}{dx} - z_s q \sin \alpha (1-x) \frac{d^2 v_s}{dx^2} \\ + z_s q \sin \alpha \frac{dv_s}{dx} + y_s q \sin \alpha (1-x) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ - y_s q \sin \alpha \frac{dw_s}{dx} - k_y h_z (v_s - h_z \theta) \\ + k_z h_y (w_s + h_y \theta) + k_\theta \theta = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

در رابطه (47)  $Q=q \cos \alpha (1-x)$  در نظر گرفته شده است. در ادامه از یک روش عددی بر مبنای بسط سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. مطابق روش مذکور، زاویه پیچش، تغییر شکل‌های عمودی و جانبی به صورت سری‌های توانی نامتناهی بسط داده می‌شوند. این رویه توسط نویسندگان متعددی به منظور محاسبه بار بحرانی کمانش اعضای تیر-ستون [15-13] و تحلیل خطی کمانشی تیرهای جدار نازک [19-16] استفاده شده است.

### ۲-۳- حل عددی

روش حل مبتنی بر این اندیشه می‌باشد که جواب دستگاه معادله دیفرانسیل کوپل حاکم بر تیر جدار نازک که طی معادلات (46) تا (48) ارائه گردید، به صورت یک سری توانی بر حسب  $x$  در نظر گرفته شود. گرچه ممکن است در ابتدا تعیین جواب‌های معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر به صورت سری توانی، یأس‌آمیز جلوه کند، اما از لحاظ محاسبات این تکنیک می‌تواند یکی از مناسبترین روش‌های موجود برای حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر مانند معادلات حاکم بر تیر مورد بحث باشد. مطابق با توضیحات ارائه شده، فرم جواب‌های عمومی حاکم بر تغییر شکل‌های جانبی، عمودی و پیچشی  $(w_s(x), v_s(x))$  و  $\theta(x)$  به صورت زیر در نظر گرفته خواهند شد:

$$v_s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad (49)$$



$$c_{i+4} = \frac{-1}{EI\varphi(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)c_{i+4}} (-GJ(i+1)(i+1)c_{i+2} - q\frac{1}{2}\cos\alpha(i)(i+1)a_{i+1} + \frac{q}{2}\cos\alpha(i)(i-1)a_i + z_s q \cos\alpha_i + \beta_z \frac{q}{2}\cos\alpha(l(i+1)(i+1)c_{i+1} - (i)(i+1)c_i) - r_c^2 q \sin\alpha(l(i+1)(i+2)c_{i+2} - (i+1)(i+2)c_{i+1}) - z_s q \sin\alpha(l(i+1)(i+2)a_{i+2} - (i+1)(i+1)a_{i+1}) - y_s q \sin\alpha(l(i+1)(i+2)b_{i+2} - (i+1)(i+1)b_{i+1}) - k_y h_z (a_i - h_z c_i) + k_z h_y (b_i + h_y c_i) + k_0 c_i) \quad (58)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

معادلات (56) تا (58) را رابطه بازگشتی می‌نامند. طبق این روابط ضرایب  $(a_4, a_5, a_6, \dots)$ ،  $(b_4, b_5, b_6, \dots)$  و  $(c_4, c_5, c_6, \dots)$  جداگانه تعیین می‌شوند. همان طور که مشخص است، هریک از معادلات دیفرانسیل تعریف شده در دستگاه معادله دیفرانسیل 46 تا 48 شامل چهار ضریب نامعین به ترتیب  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  و  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  و  $(c_0, c_1, c_2, c_3)$  می‌باشند، که با جایگذاری شرایط مرزی هر مسئله قابل تعیین می‌باشند. در نتیجه، جواب عمومی دستگاه معادله دیفرانسیل ارائه شده در روابط (46) تا (48) که شامل تغییر مکان جانبی و عمود بر محور عضو در دو جهت  $y$  و  $z$  و پیچش سطح مقطع تیر جدار نازک است، به صورت معادلات ارائه شده در روابط ذیل می‌باشد:

$$v_s(x) = a_0 v_0(x) + a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + a_3 v_3(x) + b_0 v_4(x) + b_1 v_5(x) + b_2 v_6(x) + b_3 v_7(x) + c_0 v_8(x) + c_1 v_9(x) + c_2 v_{10}(x) + c_3 v_{11}(x) \quad (59)$$

$$w_s(x) = a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + a_2 w_2(x) + a_3 w_3(x) + b_0 w_4(x) + b_1 w_5(x) + b_2 w_6(x) + b_3 w_7(x) + c_0 w_8(x) + c_1 w_9(x) + c_2 w_{10}(x) + c_3 w_{11}(x) \quad (60)$$

$$\theta(x) = a_0 \theta_0(x) + a_1 \theta_1(x) + a_2 \theta_2(x) + a_3 \theta_3(x) + b_0 \theta_4(x) + b_1 \theta_5(x) + b_2 \theta_6(x) + b_3 \theta_7(x) + c_0 \theta_8(x) + c_1 \theta_9(x) + c_2 \theta_{10}(x) + c_3 \theta_{11}(x) \quad (61)$$

همانگونه که در بالا توضیح داده شد  $w_i$ ،  $v_i$  و  $\theta_i$   $(i=0, 1, \dots, 11)$  جواب‌های عمومی معادلات (46) تا (48) می‌باشند، که به صورت سری توانی در طی روابط (49) تا (51) معرفی شدند و توسط برنامه نویسی در نرم افزار Matlab [21] قابل تعیین می‌باشند. در نهایت با جایگذاری شرایط مرزی مسئله فرم نهایی تغییر شکل تیر بدست خواهد آمد.

$$EI\varphi \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)(i+3)(i+4)c_{i+4}x^i \right) - GJ \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)c_{i+2}x^i \right) - q \cos\alpha \left( \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (i)(i+1)a_{i+1}x^i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (i)(i-1)a_i x^i \right) + e_z q \cos\alpha \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) + \beta_z q \frac{1}{2} \cos\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+1)c_{i+1}x^i - \beta_z \frac{q}{2} \cos\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i)(i+1)c_i x^i - r_c^2 q l \sin\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)c_{i+2}x^i + r_c^2 q \sin\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)c_{i+1}x^i - z_s q l \sin\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)a_{i+2}x^i + z_s q \sin\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+1)a_{i+1}x^i + y_s q l \sin\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)b_{i+2}x^i - y_s q \sin\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+1)b_{i+1}x^i - k_y h_z \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - h_z \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) + k_z h_y \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i + h_y \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) + k_0 \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0 \quad (55)$$

برای آنکه معادله (52) تا (54) به ازای تمامی مقادیر  $x$  برقرار باشد، لازم است که ضریب هریک از توان‌های  $x$  مساوی صفر باشد. بنابراین، روابط زیر نتیجه گرفته شده‌اند:

$$a_{i+4} = \frac{-1}{EI_z(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \left( \frac{q}{2} \cos\alpha(i+1)(i+2) - q \frac{1}{2} \cos\alpha(i+1)(i+2)c_{i+1} + q \sin\alpha(i+1)(i+1)a_{i+1} - ql \sin\alpha(i+1)(i+2)a_{i+2} + qz_s(i+1)(i+1)c_{i+1} - qz_s l \sin\alpha(i+1)(i+2)c_{i+2} + k_y a_i - k_y h_z c_i \right) \quad (56)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

$$b_{i+4} = \frac{-1}{EI_y(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \left( q \sin\alpha(i+1)(i+1)b_{i+1} - ql \sin\alpha(i+1)(i+2)b_{i+2} - qy_s \sin\alpha(i+1)(i+1)c_{i+1} + qy_s l \sin\alpha(i+1)(i+2)c_{i+2} + k_z b_i + k_z h_y c_i - q_i^* \right) \quad (57)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

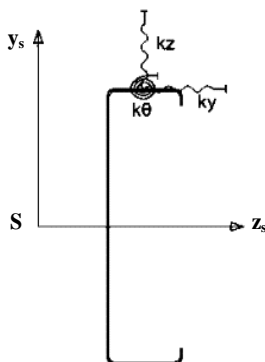


### ۳- یافته‌ها

در این مقاله، سختی‌های معادل پانل با استفاده از نتایج روش تحلیل اجزای محدود تعیین شده‌اند. مدل‌سازی مطابق پیشنهادات ارائه شده توسط Tian و همکارانش [۱۰] و به کمک نرم افزار ABAQUS [۲۲] انجام گرفته است. از دو نوع ورق OSB و Plywood ساخته شده از مصالحی که ایزوترپ نیستند در کلیه مدل‌سازی‌ها استفاده شده است. در جدول (۲) خلاصه نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود برای چند نوع پانل خلاصه شده است.

جدول (۱): مشخصات مقطع شماره یک

مشخصات هندسی نیمرخ سرد نورد شده	
۱	$I_y=14/8595 \text{ cm}^4$ ; $I_z=273/5889 \text{ cm}^4$ ; $I_y=14/8595 \text{ cm}^4$ $J=0/322579 \text{ cm}^4$ ; $A=4/6839 \text{ cm}^2$ ; $r_s^2=77/8853 \text{ cm}^2$ $e_y=-3/930117 \text{ cm}$ ; $h_y=5/295494 \text{ cm}$ ; $h_z=10/447528 \text{ cm}$
۲	$I_y=22/5926 \text{ cm}^4$ ; $I_z=328/1652 \text{ cm}^4$ ; $I_y=2014/3412 \text{ cm}^4$ $J=0/3513285 \text{ cm}^4$ ; $A=5/0996 \text{ cm}^2$ ; $r_s^2=84/2273 \text{ cm}^2$ $e_y=-3/930117 \text{ cm}$ ; $h_y=5/295494 \text{ cm}$ ; $h_z=10/447528 \text{ cm}$



شکل (۴): مقطع C شکل و محل قرارگیری فنرهای مدل‌سازی

هدف از این قسمت بررسی توانایی و دقت روش معرفی شده بر مبنای بسط سری‌های توانی در بررسی پایداری جانبی تیرهای باربر جدار نازک با سطح مقطع سرد نورد شده متکی بر پانل است. بدین منظور، چند نمونه مثال عددی به منظور محاسبه بار کمانش جانبی تیرهای مایل با تکیه‌گاه الاستیک و نیروی محوری متغیر ارائه گردیده است. مقادیر بار کمانش جانبی محاسبه شده توسط روش آنالیز مذکور با نتایج به دست آمده از روش ارائه شده توسط Tian و همکارانش [۱۰] و همچنین خروجی‌های نرم افزار CUSFM [۲۰] مقایسه گردیده‌اند. نرم افزار مذکور بر مبنای تحلیل المان الیافی محدود است و قابلیت کاربرد در تحلیل پایداری تیرهای جدار نازک فولادی با مقطع سرد نورد شده را داراست. این نرم‌افزار امکان محاسبه بار کمانشی بحرانی تیر جدار نازک با مقاطع مختلف اعم از سرد و یا گرم نورد شده و متکی بر تکیه‌گاه ساده را فراهم می‌آورد. همچنین این نرم‌افزار ابزار لازم برای بررسی انواع کمانش‌های موضعی، اعوجاجی و جانبی مقاطع دلخواه جدارنازک را با استفاده از تحلیل المان‌های الیافی در اختیار مهندسان قرار می‌دهد [۲۰]. در مثال‌های عددی ارائه شده، از دو مقطع خاص C شکل استفاده شده است. مشخصات هندسی هر دو نیمرخ استفاده شده در جدول (۱) نشان داده شده‌اند. لازم به ذکر است که سطح مقطع شماره یک، همان مقطع معروف SSMA 800S200-54 است. همچنین در این مقاله فرض می‌شود که مقطع C شکل در وسط بال خود به پانل متصل است (شکل (۴)). خصوصیات مصالح استفاده شده در کلیه اعضای مورد تحلیل نیز در شکل (۴) نشان داده شده‌اند.

جدول (۲): نتایج حاصل از مدل اجزاء محدود برای تیر مایل و پانل به طول بررسی ۳۰۴/۸ سانتی متر

شماره پانل	جنس ورق	ضخامت (mm)	مدول الاستیسیته (kg/cm <sup>2</sup> )	تنش تسلیم (kg/cm <sup>2</sup> )	k <sub>y</sub> (kg/cm <sup>2</sup> )	k <sub>z</sub> (kg/cm <sup>2</sup> )	k <sub>θ</sub> (kg/rad)
۱	OSB 24/16	۱۱/۱۱۲۵	۶۷۵۱۸	۴۳/۹۷	۸۲/۶۱	۳/۰۹	۱۳۱/۹۹
۲	Plywood 24/16	۱۱/۱۱۲۵	۷۴۴۴۴	۶۶/۲۹	۸۹/۵۸	۳/۱۶	۱۴۴/۰۸
۳	OSB	۱/۱	۱۰۱۱۳۲	۳۵/۶۹	۱۱۴/۴۰	۳/۳۳	۱۸۴/۹



مورد سوم: تحلیل کماتش خطی تیر قائم متصل به پانل و تحت نیروی محوری گسترده در طول عضو (شکل (۵-ج)).

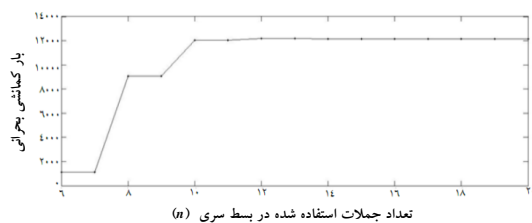
مورد چهارم: تحلیل کماتش الاستیک عضو متصل به پانل مذکور در حالت افقی و تحت نیروی محوری گسترده (شکل (۵-د)).

در شکل (۵)، اثر افزایش تعداد جملات بسط سری توانی بر روی همگرایی نتایج بدست آمده از حل معادلات دیفرانسیل کماتش جانبی حاکم بر چهار مورد مذکور نشان داده شده است. همچنین در جدول (۳)، تعداد جملات لازم در بسط سری توانی منطبق با تغییر شکل عضو برای رسیدن به جواب همگرا برای چند نمونه تیر مذکور با سطح مقطع شماره ۲ آورده شده است.

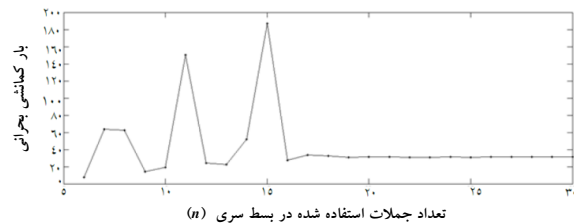
هدف از روش ارائه شده در این مقاله که بر مبنای بسط سری‌های توانی است، تعیین بار کماتشی جانبی تیر با مقطع سرد نورد شده تحت بارگذاری مختلف است. بنابراین در این مثال، به منظور بررسی اثر افزایش تعداد جملات سری توانی بر روی همگرایی نتایج، طی چهار مورد مختلف به بررسی پایداری تیر متکی بر پانل شماره ۳ به طول  $304/8$  سانتی متر با سطح مقطع شماره ۲ ارائه شده در جدول (۱)، پرداخته شده است.

مورد اول: تحلیل پایداری تیر قائم متصل به پانل، تحت نیروی محوری ثابت (شکل (۵-الف)).

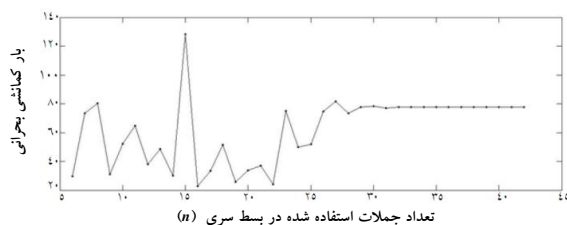
مورد دوم: تحلیل کماتش جانبی تیر قائم تحت بار محوری گسترده بدون اتصال به پانل (شکل (۵-ب)).



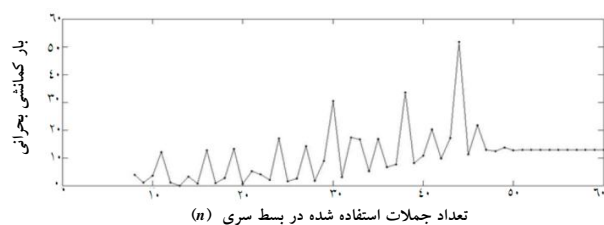
(ب) مورد دوم



(الف) مورد اول



(د) مورد چهارم



(ج) مورد سوم

شکل (۵): بررسی عملکرد روش عددی ارائه شده در تعیین بار بحرانی کماتشی اعضای منشوری

مطابق با نمودارهای شکل (۵) و جدول (۳)، برای نمونه اعضای بررسی شده می‌توان این‌گونه برداشت نمود که در حالت وجود پانل متصل به عضو نسبت به وضعیت بدون پانل نیاز به بسط سری توانی با تعداد جملات بالاتری است. همچنین در حالت قائم در صورت وجود نیروی محوری متغیر نسبت به حالت نیروی محوری ثابت برای

جدول (۳): تعداد جملات لازم توابع شکل برای رسیدن به جوابی با خطای کمتر از ۱٪

وضعیت پانل	بدون اتصال به پانل	با اتصال به پانل شماره ۳
عضو در حالت افقی	۳۱	۵۱
عضو در حالت قائم با نیروی محوری متغیر	۲۱	۳۲
عضو در حالت قائم با نیروی محوری ثابت	۱۴	۱۴

دست یابی به جواب همگرا نیاز به سری با بسط تعداد جملات بیشتری است.

۲-۳- مثال ۲

در این مثال، به منظور بررسی صحت و دقت آنالیز کمانش جانبی بر مبنای روش ارائه شده، یک مطالعه مقایسه‌ای بر روی ستونی با سطح مقطع شماره یک (جدول (۱)) صورت گرفته است. در این مثال، عضو جدار نازک مد نظر تحت نیروی محوری ثابت P قرار دارد. تیر الاستیک مورد بحث در دو وضعیت متکی بر پانل شماره یک و عدم اتصال به پانل، مورد تحلیل پایداری قرار گرفته است. این در حالی است که طول عضو از ۱ تا ۵ متر در حال تغییر است. لازم به ذکر است که، سختی‌های نظیر پانل یک در جدول (۲) ارائه گردیده است.

جدول (۴) بیانگر مقادیر بار کمانش جانبی محاسبه شده برای تیر منشوری با مقطع سرد نورد شده در هر دو حالت در نظر گرفته شده (اتصال و عدم اتصال به پانل) می‌باشد. نتایج بدست آمده از روش بسط سری‌های توانی ( $P_{cr}$ ) با مقادیر تعیین شده بر مبنای روش ارائه شده توسط Tian و همکارانش [۱۰] مقایسه گشته‌اند. به علاوه، مقدار خطای نسبی روش پیشنهاد شده با استفاده از رابطه  $\Delta = (P_{cr} - P_{cr}^{Tian}) / P_{cr}^{Tian} \times 100$  محاسبه شده و در جدول مربوطه ارائه گشته است.

همان‌گونه که در جدول (۴) مشاهده می‌شود، تمامی نتایج از تطابق و دقت خوبی برخوردار هستند. تفاوت موجود میان روش‌های حل متفاوت به علت وجود فرضیات مختلف قابل قبول است.

جدول (۴): مقادیر بار کمانش جانبی برای مقطع شماره یک در حالت متصل و عدم اتصال به پانل (kg)

ستون بدون اتصال به پانل		ستون با اتصال به پانل ۱			طول ستون (cm)
روش تیان و همکاران [۱۰]	روش ارائه شده	$\Delta(\%)$	روش تیان و همکاران [۱۰]	روش ارائه شده	
۳۱۵۰۲	۳۱۵۰۲	۱/۴۰	۳۵۶۲۴	۳۵۱۲۵	۱۲۱/۹۲
۲۰۱۶۱	۲۰۱۶۱	۲/۳۷	۲۴۸۵۶	۲۴۲۶۶	۱۵۲/۴۰
۱۴۰۰۱	۱۴۰۰۱	۳/۴۳	۱۹۳۲۳	۱۸۶۶۱	۱۸۲/۸۸
۱۰۲۸۶	۱۰۲۸۶	۴/۳۶	۱۶۲۵۴	۱۵۵۴۵	۲۱۳/۳۶
۷۸۷۵	۷۸۷۵	۵/۱۱	۱۴۴۷۳	۱۳۷۳۴	۲۴۳/۸۴
۶۲۲۳	۶۲۲۳	۵/۵۸	۱۳۴۶۸	۱۲۷۱۶	۲۷۴/۳۲
۵۰۴۰	۵۰۴۰	۵/۸۴	۱۲۹۱۱	۱۲۱۵۷	۳۰۴/۸۰
۴۱۶۶	۴۱۶۶	۵/۹۳	۱۲۶۴۷	۱۱۸۹۷	۳۳۵/۲۸
۳۵۰۰	۳۵۰۰	۵/۸۹	۱۲۵۷۰	۱۱۸۲۹	۳۶۵/۷۶
۲۹۸۲	۲۹۸۲	۵/۷۷	۱۲۶۸۴	۱۱۹۵۲	۳۹۶/۲۴
۲۵۷۲	۲۵۷۲	۵/۶۲	۱۲۸۷۸	۱۲۱۵۴	۴۲۶/۷۲
۲۲۴۰	۲۲۴۰	۱۰/۴۲	۱۳۱۵۴	۱۱۷۸۴	۴۵۷/۲۰

۳-۳- مثال ۳

در این مثال، بار کمانشی پیچشی جانبی برای دو دسته از تیرهای جدار نازک افقی با سطح مقطع شماره دو ارائه شده است. در مورد اول، بار بحرانی کمانشی برای تیر در حالت

بدون اتصال به پانل محاسبه شده است. در حالت دوم، تیر متصل به پانل نوع یک است. کلیه ضرایب سختی مربوط به پانل مذکور در جدول (۲) ارائه شده‌اند. کلیه تیرهای تحلیل شده تحت بار محوری گسترده عمود بر سطح مقطع



مقادیر خطای نسبی ( $\Delta = (P_{cr} - P_{cr}^{CUFSM}) / P_{cr}^{CUFSM} \times 100$ ) میان روش پیشنهاد شده و مقادیر محاسبه شده توسط نرم افزار در جدول مذکور نشان داده شده‌اند. مطابق جدول (۵)، تطابق بسیار خوبی میان نتایج روش پیشنهادی و مقادیر حاصله از مدل سازی در CUFSM [۲۰] وجود دارد.

تیر مد نظر، هستند. طول اعضای الاستیک تحلیل شده از ۱ تا ۵ متر متغیر است و خصوصیات هندسی نیمرخ سرد نورد شده C شکل در جدول (۱) نشان داده شده است. جدول (۵) بیانگر نتایج بار کمانشی بحرانی ( $P_{cr}$ ) محاسبه شده توسط روش عددی معرفی شده بر مبنای بسط سری توانی و مقادیر بدست آمده از روش تحلیل المان‌های الیافی با به کار گیری نرم افزار CUFSM [۲۰] است.

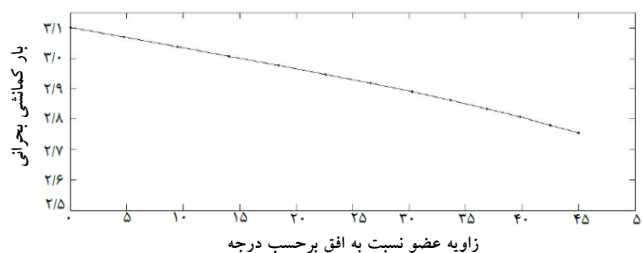
جدول (۵): مقادیر بار کمانش جانبی عضو تحت بار گسترده (kg/cm)

مقدار بار کمانش جانبی در حالت متصل به پانل			مقدار بار کمانش جانبی در صورت عدم اتصال به پانل			طول تیر (cm)
$\Delta(\%)$	نرم افزار CUFSM	روش ارائه شده	$\Delta(\%)$	نرم افزار CUFSM	روش ارائه شده	
۶/۳۶	۸۲/۶۵	۸۷/۹۱	۱۹/۴۱	۶۲/۶۴	۷۴/۸۰	۱۵۲/۴
۴/۲۳	۴۴/۹۱	۴۶/۸۱	۱۹/۴۱	۳۱/۰۹	۳۶/۲۰	۱۸۲/۸۸
۶/۴۴	۲۶/۸۱	۲۸/۵۴	۱۵/۱۵	۱۷/۰۳	۱۹/۶۲	۲۱۳/۳۶
۱۱/۱۸	۱۷/۲۸	۱۹/۲۱	۱۴/۴۶	۱۰/۰۹	۱۱/۵۵	۲۴۳/۸۴
۱۷/۳۴	۱۱/۹۱	۱۳/۹۷	۱۴/۰۳	۶/۳۶	۷/۲۵	۲۷۴/۳۲
۲۳/۳۰	۸/۷۲	۱۰/۷۵	۱۳/۷۶	۴/۲۰	۴/۷۸	۳۰۴/۸
۲۸/۰۵	۶/۷۴	۸/۶۳	۱۳/۵۷	۲/۸۹	۳/۲۹	۳۳۵/۲۳
۳۰/۸۷	۵/۴۷	۷/۱۵	۱۳/۴۴	۲/۰۶	۲/۳۴	۳۶۵/۷۶
۳۲/۱۹	۴/۶۱	۶/۱۰	۱۳/۳۴	۱/۵۱	۱/۷۱	۳۹۶/۲۴
۳۲/۵۰	۴/۰۳	۵/۳۴	۱۳/۲۶	۱/۱۳	۱/۲۸	۴۲۶/۷۲
۲۶/۶۶	۳/۶۲	۴/۵۸	۱۳/۲۰	۰/۸۶	۰/۹۸	۴۵۷/۲

زاویه ۴۵ درجه می‌سازد، مقدار بار کمانش جانبی ۱۲/۶۱٪ نسبت به حالت افقی کاهش می‌یابد. بنابراین، چنانچه در طراحی این عضو از نیروی محوری ایجاد شده ناشی از اثر شیب صرف نظر شود، محاسبات بار کمانشی با خطا همراه است و در نتیجه طراحی غیر ایمن خواهد بود.

۳-۴- مثال ۴

در این مثال، مقدار بار کمانش جانبی مقطع شماره یک بدون اتصال به پانل و به طول ۳۰۴/۸ سانتی متر به ازای مقادیر مختلف شیب عضو محاسبه شده است و نتایج بدست آمده در شکل (۶) نشان داده شده‌اند. مطابق با نمودار مشاهده می‌گردد، در حالتی که تیر با افق



شکل (۶): تغییرات بار کمانشی عضوی ( $\text{kg/cm}$ ) نسبت به شیب‌های مختلف ( $\alpha$ )

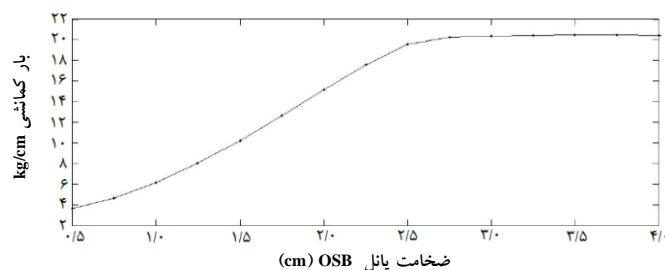
۳-۵- مثال ۵

سختی پیچشی ناشی از افزایش ضخامت پانل استفاده شده، تعیین گردیده‌اند. در تحلیل کمانشی انجام شده در این مثال، فرض می‌شود سختی‌های جانبی پانل برابر صفر هستند. نتایج بدست آمده از حل عددی بر مبنای بسط سری توانی در جدول (۶) و نمودار شکل (۷) نشان داده شده‌اند.

مثال پنجم یک تحقیق بر روی آنالیز پایداری جانبی تیر فولادی با مقطع شماره یک و به طول  $30.4/8$  سانتی متر متصل به پانل OSB است. تیر الاستیک مدنظر به صورت افقی قرار دارد و تحت بار گسترده است. مقدار بار کمانشی جانبی-پیچشی براساس روش حاضر به ازاء مقادیر مختلف

جدول (۶): مقدار بار کمانشی برای عضو در حالت افقی نسبت به سختی پیچشی‌های مختلف

بار کمانشی ( $\text{kg/cm}$ )	$k_0$	ضخامت پانل OSB ( $\text{cm}$ )
۳/۶۲۹۸	۱۲/۰۲۳۰۸	۰/۵
۴/۶۴۹	۴۰/۵۷۷۸۹	۰/۷۵
۶/۱۶۴۲	۹۶/۱۸۴۶۴	۱
۸/۰۵۴۴	۱۸۷/۸۶۰۶	۱/۲۵
۱۰/۲۳۰۹	۳۲۴/۶۲۳۱	۱/۵۰
۱۲/۶۳۴	۵۱۵/۴۸۹۵	۱/۷۵
۱۵/۱۸۵۷	۷۶۹/۴۷۷۱	۲
۱۷/۵۷۵۶	۱۰۹۵/۶۰۳	۲/۲۵
۱۹/۵۴۳۹	۱۵۰۲/۸۸۵	۲/۵۰
۲۰/۲۷۵۷	۲۰۰/۳۴	۲/۷۵
۲۰/۳۵۲۲	۲۵۹۶/۹۸۵	۳
۲۰/۴۳۴۴	۳۳۰۱/۸۳۸	۳/۲۵
۲۰/۴۹۲	۴۱۲۳/۹۱۶	۳/۵۰
۲۰/۴۹۰۶	۵۰۷۲/۲۳۷	۳/۷۵
۲۰/۴۱۶۷	۶۱۵۵/۸۱۷	۴



شکل (۷): مقدار بار کمانشی عضوی با مقطع شماره یک به طول ۳۰۴/۸ سانتی متر برای سختی پیچشی‌های مختلف

#### ۴- بحث و نتیجه گیری

در مقاله ارائه شده، هدف بررسی تأثیرات نیروی محوری متغیر بر رفتار کمانشی عضو با تکیه‌گاه الاستیک بود. به همین منظور از روش حداقل نمودن انرژی پتانسیل کلی در تحلیل پایداری عضو استفاده شد و معادلات تعادل حاکم بر مسئله حاصل گردید. سپس معادلات حاصله برای انواع وضعیت عضو سازه‌ای خلاصه گردید. نتایج حاصل از حل معادلات با نتایج حاصل از نرم افزارهای تحلیل عددی و یا نتایج بدست آمده از روش‌های پیشنهادی دیگران مقایسه شد که بیانگر دقت و توانمندی روش بسط سری توانی در حل معادلات دیفرانسیل است.

معادلات حاصل از تحلیل تیر مایل با نیروی محوری متغیر نسبت به معادلات کمانشی تیرها یا ستون‌ها، معادلاتی جامع‌تر هستند که می‌توان این معادلات را برای حالت‌های گوناگون عضو ساده نمود. از جمله آن که چنانچه معادلات برای شیب ۹۰ درجه تنظیم شوند، مقدار بار کمانشی ستونی با نیروی محوری متغیر را نتیجه می‌دهد. می‌توان همین معادلات را برای ستونی با نیروی محوری ثابت نیز تنظیم کرد. چنانچه شیب تیر صفر منظور شود، معادلات کمانشی پرلین‌های مهارشده نتیجه می‌شود. همچنین با صفر قرار دادن سختی‌های ناشی از اتصال پانل، می‌توان معادلات حاکم بر کمانش تیرها یا ستون‌های فاقد مهار جانبی را بدست آورد. به صورت خلاصه چنانچه با استفاده از روش عددی ارائه شده و برنامه‌نویسی معادلات کمانش حل شوند، با تغییراتی ساده در برخی از پارامترها می‌توان کمانش چندین نوع عضو سازه‌ای را بررسی نمود. نتایج

بدست آمده از تحلیل پایداری تیر مایل با مشخصات معین در برابر کمانش جانبی نشان می‌دهد که با افزایش شیب عضو نسبت به افق، بار بحرانی آن کاهش می‌یابد. برای یک عضو مشخص در شیب ۴۵ درجه مشاهده شد که بار کمانشی نسبت به حالت افقی ۱۲.۶٪ کاهش می‌یابد.

#### ۵- مراجع

- [1] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), "Theory of Elastic Stability", 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
- [2] Lau, S.C.W. and Hancock G.J. (1987), "Distortional Buckling Formulas for Channel Columns", Journal of Structural Engineering ASCE, Vol. 113, pp. 1063-1078.
- [3] Hancock G.J. (1997), "Design for Distortional Buckling of Flexural Members", Thin-Walled Structures, Vol. 27, pp. 3-12.
- [4] Teng, J.G., Yao, J. and Zhao, Y. (2003), "Distortional Buckling of Channel Beam-Columns", Thin Walled Structures, Vol. 4, pp. 595-561.
- [5] Ye, Z.M., Kettle, R. and Li, L.Y. (2004), "Analysis of Cold-Formed Zed-Purlins Partially Restrained by Steel Sheeting", Computer and Structures, Vol. 82, pp. 731-739.
- [6] Li, L.Y. (2004), "Lateral-Torsional Buckling of Cold-Formed Zed-Purlins Partial-Laterally Restrained by Metal Sheeting", Thin-Walled Structures, Vol. 42, pp. 995-1011.
- [7] Chu, X.T., Kettle, R. and Li, L.Y. (2004), "Lateral-Torsion Buckling Analysis of Partial-Laterally Restrained Thin-Walled Channel-Section Beams", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 60, pp. 1159-1175.
- [8] Li, L.Y. and Chen, J.K. (2008), "An Analytical Model for Analyzing Distortional Buckling of Cold-Formed Steel Sections", Thin-Walled Structures, Vol. 46, pp. 1430-1436.
- [9] Li, L.Y., Ren, C.h. and Yang, J. (2012), "Theoretical Analysis of Partially Restrained Zed-Purlin Beams Subjected to Up-Lift Loads", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 70, pp. 273-279.

- [10] Tian, Y.S., Wang, J. and Lu, T.J. (2007), "Axial Load Capacity of Cold-Formed Steel Wall Stud with Sheeting", *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, pp. 537-551.
- [11] American Iron and Steel Institute (AISI). (2007), "North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members", American Iron and Steel Institute.
- [12] Mohri, F., Brouki, A. and Roth, J.C. (2003), "Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 59, pp. 63-90.
- [13] Eisenberger, M. and Clastornik, J. (1987), "Beams on variable two-parameter elastic foundation", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, pp. 1454-1466.
- [14] Al-Sadder, S.Z. (2004), "Exact Expression for Stability Functions of a General Non-Prismatic Beam-Column Member", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 60, pp. 1561-84.
- [15] Eisenberger, M. (1991), "Stiffness Matrices for Non-Prismatic Members Including Transverse Shear", *Computers and Structures*, Vol. 40, pp. 831-835.
- [16] Eisenberger, M. and Cohen, R. (1995), "Flexural-Torsional Buckling of Variable and Open Cross-Section Members", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 121, pp. 244-254.
- [17] Kim, N., Fu, C.C. and Kim, M.-Y. (2007), "Stiffness Matrices for Flexural-Torsional/Lateral Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, pp. 739-756.
- [18] Asgarian, B., Soltani, M. and Mohri, F. (2013), "Lateral-Torsional Buckling of Tapered Thin-Walled Beams with Arbitrary Cross-Sections", *Thin-Walled Structures*, Vol. 62, pp. 96-108.
- [19] Soltani, M., Asgarian, B. and Mohri, F. (2014), "Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the Power Series Method", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 96, pp. 106-126.
- [20] Schafer, B.W. and Ádány S. (2006), "Buckling Analysis of Cold-Formed Steel Members Using CUFSM: Conventional and Constrained Finite Strip Methods", *Eighteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Orlando.
- [21] MATLAB Version 7.6 .MathWorks Inc, USA, 2008.

