



تعیین بار کمانش الاستیک ستون‌های باریک شونده با استفاده از یک روش تحلیلی نوین بر مبنای بسط مک لورن

معصومه سلطانی^{۱*}، اسما سیستانی^۲، بهروز عسگریان^۳

۱- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه کاشان، کاشان

۲- کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۳- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* کاشان، صندوق پستی ۸۷۳۱۷۵۳۱۵۳، msoiltani@kashanu.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۵/۲۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۴/۳۰)

چکیده

تحلیل کمانشی ستون‌ها به عنوان اصلی‌ترین عضو سازه‌ای از جایگاه ویژه‌ای در تحقیقات مهندسی برخوردار است. امروزه استفاده از ستون‌های غیرمنشوری در قاب‌ها به علت افزایش پایداری و کاهش وزن سازه و به تبع آن کاهش نیروهای زلزله، افزایش یافته است. در بررسی پایداری ستون‌ها مهمترین موضوع، تعیین نیروی کمانش بحرانی می‌باشد. بدین منظور بایستی معادله دیفرانسیل پایداری حاکم را حل نمود. در بسیاری از مطالعات، حل دقیق و یا بسته معادله دیفرانسیل مذکور امکان پذیر نبوده و در این راستا محققان از روش‌های نیمه تحلیلی و یا عددی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم و تعیین نیروی کمانشی بهره می‌گیرند. در این تحقیق، تغییرات مقطع به صورت توابع توانی با درجه یک تا چهار و همچنین به صورت تابع نمایی در نظر گرفته شده است. تغییرات مقطع به صورت تابع نمایی یکی از خاص‌ترین حالات ستون‌های ماهیچه‌ای است که کمتر روشی قادر به حل معادله دیفرانسیل پایداری حاکم بر این ستون‌ها بوده است. در این پژوهش، معادله دیفرانسیل پایداری حاکم بر ستون با مقطع متغیر و شرایط تکیه‌گاهی متفاوت با در نظر گرفتن تابع تغییر شکل عضو به صورت یک چند جمله‌ای و تغییرات صلیب خمشی مقطع به صورت بسط مک لورن حل می‌گردد و در انتها بار کمانش بحرانی الاستیک با استفاده از روش حل مقادیر ویژه محاسبه می‌شود. نتایج حاصل از حل مثال‌های عددی با روش فوق در مقایسه با نتایج حاصل از سایر روش‌های موجود، بیانگر این است که سری‌های توانی به عنوان یکی از روش‌های بسیار قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل پیچیده، از دقت کافی و سرعت بالا در تحلیل پایداری الاستیک ستون‌ها با مقطع متغیر برخوردار هستند.

واژگان کلیدی

تحلیل پایداری، ستون‌های غیرمنشوری، بسط مک لورن، مقادیر ویژه

Determination of Elastic Buckling Load of Tapered Columns Using a Novel Analytical Method Based on Maclaurin Expansion

M. Soltani, A. Sistani, B. Asgarian

Abstract

Elastic tapered columns are a class of important structural components, which have wide applications in civil structures. This is because their ability to increase both strength and stability, reduce the whole weight of structure and consequently reducing earthquake forces. In this study, it is assumed that flexural rigidity of the considered columns with desired end conditions varies smoothly along the beam axis by power-law formulations and or exponential ones. For accurate estimation of the stability characteristics, the equilibrium equation should be solved. In the presence of arbitrary variation in geometrical properties, the governing equation becomes a differential equation with variable coefficients in which the classical methods adopted in stability analysis of uniform columns are not efficient and no longer valid. It is noteworthy that exponential variation of mechanical properties is one of the most special states of non-prismatic columns that few methods are able to solve its governing differential equation. For such complicated problem, numerical, analytical and mathematical methodologies are usually employed by researchers to solve the equilibrium equation and evaluate exact buckling loads. In the current paper, a novel semi-analytical technique based on combination of polynomial approximation and the Maclaurin series is proposed to solve the governing differential equation. The critical buckling loads of the beam are finally obtained by imposing the natural and initial boundary conditions and solving the eigenvalue problem. The obtained outcomes are compared to the results of other available benchmarks. The competency and efficiency of the method is then remarked.

Keywords

Stability analysis, Non-prismatic Columns, Maclaurin Series, Eigenvalues

نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد / ۲۹



انتخاب مقطع مناسب برای یک عضو خمشی و یا محوری بر پایه تنش موجود در مقطع بحرانی صورت می‌گیرد. بنابراین در تمام مقاطع دیگر عضو، تنش کمتر از مقدار مجاز است. در نتیجه، در چنین اعضایی از تمام ظرفیت بالقوه مصالح استفاده نمی‌شود. بنابراین برای برطرف نمودن این مشکل و همچنین به منظور کاهش وزن قطعات سازه‌ای، در برخی موارد اعضا به صورت مقطع متغیر طراحی می‌شوند و این اعضا، غیرمنشوری نام دارند. به عنوان مثال، در حالتی که یک میله دو سر مفصل تحت فشار قرار دارد، بدیهی است که با برداشتن قسمتی از مصالح دو انتها و افزایش مقطع عرضی در میانه عضو می‌توان پایداری آن را افزایش داد. ستون‌های غیرمنشوری توان برابری بیشتری نسبت به یک ستون منشوری با سطح مقطع بزرگتر دارند. تحلیل پایداری الاستیک این نوع ستون‌ها و تعیین نیروی کمانش آن‌ها سابقه بسیار طولانی در تحقیقات مهندسی دارد. در این راستا محققان با استفاده از روش‌های مختلفی به حل معادله دیفرانسیل پایداری یک المان کلی تحت اثر نیروی محوری به منظور تعیین نیروی کمانش ستون‌ها پرداخته‌اند.

در این زمینه، Timoshenko و Gere [۱]، Chen و Lui [۲] و Bazant و Cedolin [۳] روش‌های متعددی بر مبنای روش‌های تقریبی عددی و یا حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم بر پایداری ستون‌های الاستیک با شرایط مرزی مختلف را ارائه نمودند.

Gere و Carter حل دقیق کمانش ستون‌های پلکانی را برای اولین بار مطرح و معرفی نمودند [۴]. در سال ۱۹۶۲، Frisch-Fay حل مسئله کمانش و تعیین نیروی کمانش بحرانی یک المان منشوری با نیروی محوری یکنواخت تحت شرایط مرزی مختلف را با استفاده از روش تحلیلی مورد مطالعه قرار دارد و بار کمانش بحرانی را برای یک ستون که از بالا تا پایین مهار شده بود با استفاده از انتگرال بسط محاسبه نمود [۵]. Ermopoulos با استفاده از روش شیب افت طول موثر کمانش ستون‌های غیرمنشوری را محاسبه کرد [۶]. در سال ۱۹۸۰، Iromenger نیروی کمانش بحرانی ستون‌های مخروطی و پله‌ای را با استفاده از روش اختلاف محدود بدست آورد [۷]. در سال ۱۹۸۸، Smith با استفاده از روش انرژی و تحلیل پارامتری، کمانش ستون‌های مخروطی را ارزیابی و بار کمانش آن‌ها را تعیین نمود [۸]. Li و Arbabi کمانش الاستیک تیرستون‌های غیرمنشوری با ضخامت متغیر در طول را مورد بررسی قرار

دادند [۹]. پایداری ستون‌های مخروطی با تغییرات خطی سختی خمشی در طول، توسط Siginer مطالعه گردید [۱۰]. در سال ۱۹۹۸، Sampaio و همکارانش با ارائه یک مدل ریاضی و با استفاده از حل تحلیلی، کمانش تیر-ستون‌های کج دو سر مفصل را بررسی کردند و حل دقیقی را برای آن‌ها ارائه نمودند [۱۱]. Wang و همکارانش حل بسته معادلات حاکم بر کمانش اعضای سازه‌ای مانند ستون‌ها، تیرها و صفحات را ارائه کردند [۱۲]. Li و همکارانش در سال‌های ۱۹۹۴، ۱۹۹۵ و ۱۹۹۶ تحلیل پایداری ستون‌های تک و چند بخشی با مقاطع مختلف تحت توزیع مختلف بار محوری مرکزی را با استفاده از توابع بسط مورد بررسی و مطالعه قرار دادند [۱۳-۱۵]. در سال ۲۰۰۸، Rahai و Kazemi نیروی کمانشی ستون‌های با مقطع متغیر پلکانی را در مودهای مختلف با استفاده از روش انرژی تعیین کردند [۱۶]. Atay و Coşkun مسئله کمانش ستون‌ها با مقاطع ثابت و متغیر را مورد بررسی قرار دادند و معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش را با استفاده از روش تکرار تغییرات حل و بار کمانش بحرانی را تعیین نمودند [۱۷]. در ادامه، Atay و Coşkun با استفاده از روش تکرار تغییرات پایداری الاستیک ستون‌های اوپلر با مهاربندی پیوسته را بررسی نمودند [۱۸]. در سال ۲۰۰۹، Atay با استفاده از روشی نوین به نام اختلال هموتویی به حل معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش ستون‌های غیرمنشوری پرداخت [۱۹]. Okay و همکارانش با استفاده از روش تکرار تغییرات بار کمانش بحرانی و مود تغییر شکل کمانشی را برای ستون‌های چاق به دست آوردند [۲۰]. Shahba و Rajasekaran در سال ۲۰۱۲ ارتعاش آزاد و پایداری خطی و ارتجاعی تیر اوپلر-برنولی با مقطع متغیر ساخته شده از مصالح مدرج تابعی محوری را بررسی نمودند [۲۱]. Pradhan و Chakraverty به تحلیل دینامیکی تیرهای ساخته شده از مصالح مدرج تابعی با استفاده از روش عددی رایلی-ریتز پرداختند. آن‌ها در تحقیقی دیگر نتایج بدست آمده را با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و همچنین استفاده از قانون توانی برای مصالح بهبود داده‌اند [۲۲ و ۲۳]. در سال ۲۰۱۶، Trinh و همکارانش فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمانشی برای تیرهای ساخته شده از مصالح مدرج تابعی تحت بارهای دینامیکی و حرارتی را محاسبه نمودند [۲۴]. در ادامه، Paul و Das ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو پیش‌تنیده ساخته شده از مصالح مدرج تابعی را با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های بزرگ با استفاده از روش



حساب تغییرات مورد بررسی قرار دادند [25]. اخیراً، Soltani و Sistani با استفاده از روش اختلاف محدود با خطای مرتبه دو، بار بحرانی کمانش را برای ستون با صلبیت خمشی غیریکنواخت تحت بار محوری متغیر محاسبه کردند [26].

برخی محققان به منظور مطالعه مسئله کمانش، ارتعاش آزاد و محاسبه ماتریس سختی اعضای الاستیک با مقطع متغیر از روش سری‌های توانی بهره گرفته‌اند. سری به صورت $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ که در آن a_0, a_1, \dots و a_n اعداد حقیقی هستند، سری توانی نامیده می‌شود. بسط سری‌های توانی یکی از روش‌های عددی قدرتمند و پیشرفته در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر است که در علوم مهندسی کاربردهای فراوانی دارد. این روش اولین بار توسط لئونارد اویلر، یکی از بزرگ‌ترین ریاضیدانان که در قرن هجدهم می‌زیست، معرفی گردید. روش حل مبتنی بر این اندیشه است که جواب معادله به صورت یک سری توانی بر حسب x نوشته شود. گرچه ممکن است در نظر اول تعیین جواب‌های معادله دیفرانسیل به صورت سری، یأس‌آمیز جلوه کند اما از لحاظ محاسبات این روش می‌تواند آسانترین و مناسبترین راه برای حل این معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر باشد. در این روش، کلیه پارامترهای متغیر دخیل در معادله دیفرانسیل پایداری مانند مولفه تغییر شکل، صلبیت خمشی و بار محوری با استفاده از توابع چندجمله‌ای تخمین زده می‌شوند. در این روش، با افزایش تعداد جملات سری، فرم تغییر شکل کمانشی و یا ارتعاش آزاد به مقدار دقیق همگرا می‌شود.

Eisenberger و Clastornik در سال ۱۹۸۷ روش المان محدود نوینی براساس بسط سری‌های توانی برای محاسبه دقیق ماتریس سختی الاستیک، سختی هندسی و جرم برای بررسی رفتار ارتعاشی تیر اویلر-برنولی با مقطع ثابت بر روی بستر الاستیک دو پارامتری را معرفی نمودند [27]. در سال ۲۰۰۴، Al-Sadder معادله دیفرانسیل معمولی درجه چهار حاکم بر پایداری تیر-ستون‌های غیرمنشوری تحت بار محوری کششی و فشاری یکنواخت را با استفاده از روش سری‌های توانی حل نمود [28]. در سال ۲۰۰۷، Kim و همکارانش یک روش المان محدود براساس سری‌های توانی برای محاسبه دقیق درایه‌های ماتریس سختی و جرم تیر جدار نازک با مقطع باز را ارائه نمودند [29]. Luo و Huang در سال ۲۰۱۱ با تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل حاکم بر ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو باریک شوند از جنس مواد مدرج تابعی به یک معادله دیفرانسیل

همگن مستقل و حل تحلیلی آن به وسیله روش بسط سری‌های توانی، مقدار فرکانس طبیعی ارتعاش را تعیین نمودند [30]. Soltani و همکارانش در طی سال‌های سال ۲۰۱۴ و ۲۰۱۶ نیز با استفاده از این روش نیمه تحلیلی، پایداری الاستیک و کمانش جانبی-پیچشی تیرهای جدار نازک ماهیچه‌ای همچین تیر اویلر-برنولی غیرمنشوری متکی بر بستر الاستیک را مطالعه نمودند [31 و 32].

در مقاله ارائه شده، معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر پایداری ستون غیرمنشوری با استفاده از روش عددی سری توانی حل می‌شود. به منظور حل، بایستی کلیه ضرایب متغیر معادله دیفرانسیل مذکور، به صورت بسط یک چند جمله‌ای متناهی در نظر گرفته شود. سپس بسط مک لورن توابع حاکم بر تغییرات ممان اینرسی سطح مقطع ستون‌های موجود تعیین می‌گردد. در ادامه براساس قوانین حاکم بر روش حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر به روش سری توانی، معادله مرتبه چهار پایداری حل می‌گردد و فرم تغییر شکل ستون با مقطع متغیر برحسب سری توانی به دست می‌آید. سپس با جایگذاری شرایط مرزی (دو شرط برای هر انتهای عضو) و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار بار محوری بحرانی تعیین می‌شود. در این مطالعه، ستون‌ها با دو نوع تغییرات مقطع به صورت تابع توانی و تابع نمایی و با چهار نوع شرایط تکیه گاهی یک سر گیردار، دو سر گیردار، دو سر مفصل و یک سر گیردار یک سر مفصل در نظر گرفته شده‌اند و برای هر کدام به صورت جداگانه در متلب برنامه نویسی شده است. در انتهای مقاله، چند نمونه مثال با استفاده از روش پیشنهادی حل شده و در نهایت، به منظور کنترل صحت و دقت روش عددی ارائه شده، نتایج حاصل با سایر روش‌های موجود مقایسه گردیده‌اند.

۲- کمانش ستون‌های الاستیک

جهت بررسی پایداری ارتجاعی ستون‌ها، عمومی‌ترین حالت ستون تحت اثر نیروی محوری، ممان خمشی و یک نیروی برشی در دو انتها مانند آنچه در شکل (۱) نشان داده شده است را در نظر می‌گیریم.

براساس تئوری تیر اولر-برنولی، رابطه زیر حاکم بر لنگر خمشی داخلی عضو مد نظر است:

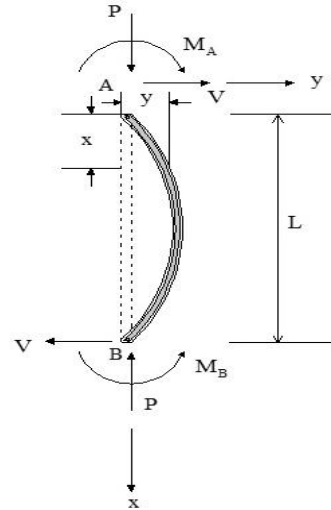
$$M = EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

که در آن E مدول الاستیسیته یانگ، $I(x)$ ممان دوم سطح حول محور ضعیف، y تغییر شکل جانبی ستون و M بیانگر



ممان خمشی است. معادله تعادل برای یک قطعه از ستون مطابق آنچه در شکل (۲) نشان داده شده است، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$EI(x)y'' - Vx + P(x)y - M_A = 0 \quad (۲)$$



شکل ۱- کمانش ستون و نیروهای وارد بر آن

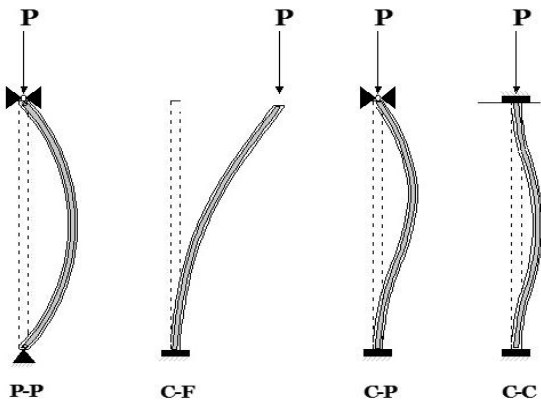
معادله (۴)، معادله حاکم بر کمانش ستون‌های الاستیک ساخته شده از مصالح همگن بدون توجه به شرایط مرزی حاکم بر آنها است. همواره برای حل معادلات دیفرانسیل و تعیین جواب دقیق آنها نیاز به شرایط مرزی در ابتدا و انتهای محدوده معادله است. از آنجا که معادله پایداری ستون‌های غیرمنشوری از مرتبه چهار است، به چهار شرط مرزی برای حل معادله (۴) نیاز می‌باشد. در نتیجه، مطابق با فرضیات حاکم بر خمش و تغییر شکل کمانشی ستون، شرایط مرزی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل شده به صورت زیر است:

$$y = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (۵)$$

$$y = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad (۶)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (۷)$$

همانگونه که در ابتدا توضیح داده شد، چهار نوع ستون با شرایط مرزی (دو سر مفصل، دو سر گیردار، یک سر گیردار و یک سر مفصل) مختلف مطابق شکل (۳) در این مطالعه در نظر گرفته شده است.



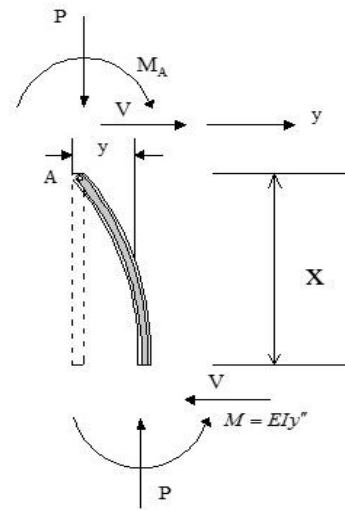
شکل ۳- ستون‌های در نظر گرفته شده با شرایط تکیه‌گاهی مختلف

۳- سری‌های توانی

هر سری نامتناهی به فرم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (۸)$$

را که در آن x متغیر مستقل و $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد، یک سری توانی (نسبت به x)، نامیده می‌شود. اعداد $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ و a_n ضرایب یا جملات سری نامیده می‌شوند. اگر $a_N \neq 0$ و به ازای هر $n > N$ $a_n = 0$ باشد، سری



شکل ۲- نیروهای وارد بر المان

اگر از رابطه (۲) نسبت به متغیر x دو بار مشتق گرفته شود، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] = 0 \quad (۳)$$

بسط رابطه (۳) و ساده سازی آن رابطه زیر را نتیجه می‌دهد.

$$EI(x)y^{(iv)} + 2EI'(x)y''' + EI''(x)y'' + P'(x)y' + P(x)y'' = 0 \quad (۴)$$

توانی (۸) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_N x^N \quad ; \quad a_N \neq 0 \quad (9)$$

که یک چندجمله‌ای از درجه N است. به بیانی دیگر می‌توان گفت سری‌های توانی چند جمله‌ای‌هایی با بی‌نهایت تعداد جمله هستند.

۳-۱- سری تیلور و مک لورن

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد و در این فاصله مشتقات پیوسته تا مرتبه m داشته باشد و مشتق متناهی مرتبه $(n+1)$ در فاصله (a, b) وجود داشته باشد، آنگاه با انتگرال گیری از مشتق مرتبه m در بازه (x_0, x) خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^x f^{(n)}(x) dx = f^{(n-1)}(x) \Big|_{x_0}^x \quad (10)$$

با انتگرال گیری مجدد از رابطه فوق، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x f^{(n)}(x) dx \right) dx = \int_{x_0}^x \left(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) \right) dx \quad (11)$$

اگر عمل فوق را n بار تکرار کنیم، رابطه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f^{(n)}(x) (dx)^n = f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \quad (12)$$

به ازای هر x متعلق به بازه $[a, b]$ عبارت زیر برقرار است:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}(x_0) \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x) \quad (13)$$

که در آن R_n باقیمانده سری نامیده می‌شود و برابر است با:

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f^{(n)}(x) (dx)^n \quad (14)$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین و با n بار انتگرال گیری از رابطه فوق می‌توان فرم لاگرانژ باقیمانده R_n را به صورت زیر نوشت:

$$R_n(x) = f^{(n)}(\xi) \frac{(x-x_0)^n}{(n)!} \quad (15)$$

اگر به ازای هر x متعلق به بازه $[a, b]$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ باشد. آنگاه سری فوق بر بازه $[a, b]$ همگرا به $f(x)$ است و

سری تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه x_0 نامیده می‌شود. در واقع بسط تیلور تابع حول نقطه x_0 به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots \quad (16)$$

اگر در دستور فوق $x_0 = 0$ باشد، بسط مک لورن به شرح زیر حاصل می‌گردد:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (17)$$

۴- حل معادله دیفرانسیل پایداری ستون با تغییرات

نمایی مقطع

فرم تغییرات لنگر دوم سطح به صورت تابع نمایی به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x/L} \quad (18)$$

که در آن a ضریب مثبت، L طول ستون و I_0 ممان اینرسی مقطع بزرگتر در ابتدای ستون است. با توجه به رابطه فوق، معادلات زیر برای مشتقات مراتب مختلف تابع تعریف کننده تغییرات صلبیت خمشی ستون باریک شونده نمایی مدنظر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} I'(x) &= -\frac{\alpha}{L} I_0 e^{-\frac{\alpha x}{L}} \rightarrow I'(0) = -\frac{\alpha}{L} I_0 \\ I''(x) &= \frac{\alpha^2}{L^2} I_0 e^{-\frac{\alpha x}{L}} \rightarrow I''(0) = \frac{\alpha^2}{L^2} I_0 \\ I'''(x) &= -\frac{\alpha^3}{L^3} I_0 e^{-\frac{\alpha x}{L}} \rightarrow I'''(0) = -\frac{\alpha^3}{L^3} I_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{\alpha^n}{L^n} I_0 e^{-\alpha x} \rightarrow \\ I^{(n)}(0) &= (-1)^n \frac{\alpha^n}{L^n} I_0 \end{aligned}$$

بنابراین بسط مک لورن تابع فوق برابر است با:

$$I(x) = I_0 - \frac{\alpha}{L} I_0 x + \frac{\alpha^2}{2! L^2} I_0 x^2 - \dots + (-1)^n \frac{\alpha^n}{n! L^n} I_0 x^n + \dots \quad (20)$$

در نتیجه فرم سری توانی تابع فوق برابر خواهد شد با:

$$I(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k! L^k} I_0 x^k \quad (21)$$

بر مبنای روش بسط سری توانی، کلیه متغیرهای دخیل در معادله دیفرانسیل پایداری سیستم از جمله ممان اینرسی متغیر سطح مقطع عضو $I(x)$ و نیروی محوری متغیر در طول عضو



$P(x)$ به فرم سری توانی زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$I(x) = I_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i! L^i} x^i; \quad P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i x^i \quad (22)$$

با معرفی یک مختصات بی بعد محلی $\zeta = x/L$ ، روابط فوق

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I(\zeta) = I_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} \zeta^i; \quad P(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i L^i \zeta^i \quad (23)$$

با جایگذاری معادله (23) و متغیر بدون بعد معرفی شده در معادله دیفرانسیل خطی حاکم بر پایداری ستون (3) رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left[EI_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} \zeta^i \right) \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right] + \quad (24)$$

$$L^2 \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} P_i L^i \zeta^i \right) \frac{dy}{d\zeta} \right] = 0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاصل شده در رابطه (24) با استفاده از بسط سری توانی نامتناهی برحسب توان‌های ζ قابل حل است. در نتیجه، جواب عمومی برای فرم تغییر شکل که در معادله فوق صدق می‌کند به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$y(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \zeta^i \quad (25)$$

در ادامه کار، با توجه به وجود مشتقات مرتبه اول و دوم فرم تغییر شکل تیر مد نظر در رابطه (24)، خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{d\zeta} = \sum_{i=1}^{\infty} i b_i \zeta^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) b_{i+1} \zeta^i \quad (1-26)$$

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) b_i \zeta^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) b_{i+2} \zeta^i \quad (2-26)$$

روابط فوق را در معادله (24) جایگذاری کرده و خواهیم داشت:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left[EI_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} \zeta^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2) b_{j+2} \zeta^j \right) \right] + \quad (27)$$

$$L^2 \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} P_i L^i \zeta^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) b_{j+1} \zeta^j \right) \right] = 0$$

با ضرب جمله به جمله هر دو سری و با توجه به قانون حاکم بر جمع و ضرب پارامتریک سری‌ها، رابطه فوق به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left[EI_0 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} (j-i+2)(j-i+1) \cdot b_{j-i+2} \zeta^j \right] + L^2 \frac{d}{d\zeta} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j P_i L^i (j-i+1) \cdot b_{j-i+1} \zeta^j \right] = 0 \quad (28)$$

در نتیجه:

$$EI_0 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j+2} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} (j+2)(j+1)(j-i+4) \cdot (j-i+3) b_{j-i+4} \zeta^j \right] + L^2 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j+1} P_i^* (j+1) \cdot (j-i+3) b_{j-i+4} \zeta^j \right] = 0 \quad (29)$$

$$(j-i+1) b_{j-i+2} \zeta^j = 0$$

به طوریکه:

$$P_i^* = P_i L^i \quad (30)$$

و یا

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ [EI_0(j+4)(j+3)(j+2)(j+1) b_{j+4}] + [EI_0 \sum_{i=1}^{j+2} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} (j-i+4)(j-i+3) \cdot (j+2)(j+1) b_{j-i+4}] + L^2 [\sum_{i=0}^{j+1} P_i^* (j+1) \cdot (j-i+2) b_{j-i+2}] \right\} \zeta^j = 0 \quad (31)$$

برای آن که معادله (31) به ازای تمامی مقادیر ζ برقرار باشد، لازم است که ضریب هر یک از توان‌های ζ صفر باشد. بنابراین، رابطه بازگشتی زیر نتیجه گرفته شده است:

$$b_{j+4} = \frac{-1}{EI_0(j+4)(j+3)(j+2)(j+1)} \times \left\{ EI_0 \sum_{i=1}^{j+2} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} (j-i+4)(j-i+3)(j+2) \cdot (j+1) b_{j-i+4} + L^2 \sum_{i=0}^{j+1} P_i^* (j+1)(j-i+2) \cdot b_{j-i+2} \right\}; \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

5- حل معادله دیفرانسیل پایداری ستون با تغییرات توانی مقطع

در این حالت فرض می‌کنیم که تغییرات ممان اینرسی در طول عضو به صورت یک تابع توانی و به فرم زیر باشد:

$$I(x) = I_0 \left(1 - \frac{b}{L} x \right)^n \quad (33)$$

که در آن طول ستون، I_0 لنگر دوم سطح در ابتدای ستون همچنین n و b ضرایب مثبت هستند. مشتقات مراتب مختلف این تابع و مقادیر آن‌ها در $x=0$ برابرند با:

$$I'(x) = -n \frac{b}{L} I_0 \left(1 - \frac{b}{L} x \right)^{n-1} \rightarrow$$

$$I'(0) = -n \frac{b}{L} I_0$$

$$I''(x) = n(n-1) \frac{b^2}{L^2} I_0 \left(1 - \frac{b}{L} x \right)^{n-2} \rightarrow$$

$$I''(0) = n(n-1) \frac{b^2}{L^2} I_0$$

$$I'''(x) = -n(n-1)(n-2) \frac{b^3}{L^3} I_0 \left(1 - \frac{b}{L} x \right)^{n-3} \quad (34)$$

$$\rightarrow I'''(0) = -n(n-1)(n-2) \frac{b^3}{L^3} I_0$$

.

.

.

$$I^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{b^n}{L^n} I_0 n! \rightarrow$$

$$I^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{b^n}{L^n} I_0 n!$$

بنابراین بسط مک لورن تابع فوق برابر است با:



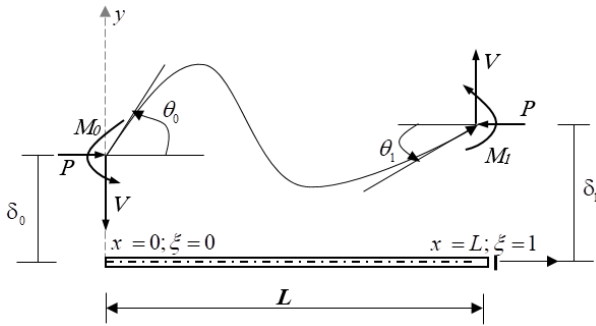
محاسبه می‌گردد. در این مرحله فرم تغییر شکل کمانشی ستون غیرمنشوری تحت بارگذاری محوری نیز قابل تعیین است. شکل (۴) بیانگر فرم تغییر شکل یک عضو خمشی با صرف نظر نمودن از تغییر شکل برشی است. مطابق با شکل رسم شده و با استفاده از سیستم مختصات عمومی و محلی، شرایط مرزی برای نقاط ابتدایی و انتهایی عضو ($x = L$ و $x = 0$) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$y(0) = \delta_0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \theta_0, \quad (1-39)$$

$$EI \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = M_0, \quad \left. \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = V$$

$$y(L) = \delta_1, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \theta_1, \quad (2-39)$$

$$EI \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=L} = M_1, \quad \left. \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = V$$



شکل ۴- فرم تغییر شکل عضو مدنظر به همراه شرایط مرزی هندسی و طبیعی انتهایی در مختصات کلی و محلی

در این تحقیق اعضای غیرمنشوری با چهار نوع شرایط تکیه‌گاهی: دوسر مفصل، یک سر گیردار- یک سر آزاد، دو سر گیردار و یک سرگیردار-یک سر مفصل در نظر گرفته شده‌اند. در ادامه با استفاده از رابطه (۳۹) و با توجه به شرایط مرزی حاکم بر ابتدا و انتهای عضو که در عبارات (۵) تا (۷) ارائه شدند، خواهیم داشت:

- عضو دوسر مفصل

در این حالت تغییر مکان عمودی ابتدا و انتهای عضو برابر صفر است. علاوه بر شرایط مذکور، مقدار لنگر خمشی در هر دو تکیه‌گاه مساوی صفر است.

$$1- \text{ در } x=0 \text{ (} \zeta=0 \text{)}$$

$$y(0) = \delta_0 = 0 \rightarrow \quad (1-40)$$

$$b_0 y_0(0) + b_1 y_1(0) + b_2 y_2(0) + b_3 y_3(0) = 0$$

$$I(x) = I_0 + \left(-n \frac{b}{L} I_0\right) x + \frac{n(n-1)b^2}{2! L^2} I_0 x^2 + \dots \quad (35)$$

$$+ (-1)^n \frac{b^n}{L^n} I_0 x^n + \dots$$

در نتیجه فرم سری توانی تابع حاکم بر تغییرات ممان اینرسی به صورت زیر است:

$$I(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^k n!}{k! L^k (n-k)!} I_0 x^k \quad (36)$$

در رابطه فوق n معرف درجه تابع توانی ارائه شده در معادله (۳۳) است و k مربوط به درجه بسط مک لورن حاصل شده است.

در این حالت با در نظر گرفتن تغییرات ممان اینرسی ستون به صورت یک تابع توانی با درجه دلخواه و سپس حل معادله دیفرانسیل پایداری و طی نمودن مراحل حل مطابق با معادلات (۲۳) تا (۳۱) رابطه بازگشتی ذیل حول ضرایب ثابت b_{j+4} برقرار می‌باشد:

$$b_{j+4} = \frac{-1}{EI_0(j+4)(j+3)(j+2)(j+1)} \times \{EI_0 \sum_{i=1}^{j+2} \frac{(-b)^i n!}{i! L^i (n-i)!} (j-i+4)(j-i+3)(j+2) \cdot \quad (37)$$

$$(j+1)b_{j-i+4} + L^2 \sum_{i=0}^{j+1} P_i^* (j+1)(j-i+2) \cdot b_{j-i+2}\} \quad ; \text{ for } j = 0, 1, 2, \dots$$

مطابق با عبارات بازگشتی بدست آمده در روابط (۳۲) و (۳۷) برای هر دو حالت در نظر گرفته از تغییرات لنگر دوم سطح مقطع ستون، ضرایب b_6, b_5, b_4 و ... قابل تعیین هستند. همان طور که مشخص است، جواب معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه (۴) در مختصات بدون بعد شامل چهار ضریب نامعین به ترتیب b_3, b_2, b_1, b_0 می‌باشد که با جایگذاری شرایط مرزی مربوط به هر دهانه از تیر قابل تعیین هستند. در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه چهار خطی با ضرایب متغیر حاکم بر تغییر شکل کمانشی ستون‌های ماهیچه‌ای همگن، در مختصات محلی به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$y = b_0 y_0(\zeta) + b_1 y_1(\zeta) + b_2 y_2(\zeta) + b_3 y_3(\zeta) \quad (38)$$

لازم به ذکر است که جملات y_i ($i = 0, 1, 2, 3$) به وسیله نرم افزار Matlab [۳۳] و با توجه به روابط بازگشتی به دست آمده در عبارات (۳۲) و (۳۷) تعیین می‌شوند. در خصوص نحوه استخراج رابطه (۳۸) اطلاعات کامل‌تری در مراجع [۲۸، ۳۱ و ۳۲] ارائه شده است. در پایان، با استفاده از شرایط مرزی مربوط به هر دهانه از عضو باریک شونده و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار دقیق بار کمانش بحرانی ستون‌های مدنظر



۲- در $x = L$ ($\zeta = 1$)

$$y(1) = \delta_1 = 0 \rightarrow \quad (3-42)$$

$$b_0 y_0(1) + b_1 y_1(1) + b_2 y_2(1) + b_3 y_3(1) = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{L} \left. \frac{dy}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \theta_0 = 0 \rightarrow \quad (4-42)$$

$$b_0 y'_0(1) + b_1 y'_1(1) + b_2 y'_2(1) + b_3 y'_3(1) = 0$$

- عضو یک سرگیردار- یک سر مفصل

در این حالت در ابتدای عضو و در محل تکیه‌گاه گیردار از تغییر مکان عمودی و دوران عضو جلوگیری شده است و در سمت دیگر و محل تکیه‌گاه مفصلی، مقدار تغییر مکان و لنگر خمشی مساوی صفر هستند.

۱- در $x = 0$ ($\zeta = 0$)

$$y(0) = \delta_0 = 0 \rightarrow \quad (1-43)$$

$$b_0 y_0(0) + b_1 y_1(0) + b_2 y_2(0) + b_3 y_3(0) = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{L} \left. \frac{dy}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \theta_0 = 0 \rightarrow \quad (2-43)$$

$$b_0 y'_0(1) + b_1 y'_1(1) + b_2 y'_2(1) + b_3 y'_3(1) = 0$$

۲- در $x = L$ ($\zeta = 1$)

$$y(1) = \delta_1 = 0 \rightarrow \quad (3-43)$$

$$b_0 y_0(0) + b_1 y_1(0) + b_2 y_2(0) + b_3 y_3(0) = 0$$

$$EI \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=L} = \frac{EI}{L^2} \left. \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=1} = M_1 = 0 \rightarrow \quad (4-43)$$

$$b_0 y''_0(1) + b_1 y''_1(1) + b_2 y''_2(1) + b_3 y''_3(1) = 0$$

۶- نتایج عددی

در این قسمت، چند نمونه مثال عددی شامل تحلیل پایداری ستون‌های غیرمنشوری با تغییرات سطح مقطع مطابق با توابع توانی و یا نمایی با شرایط مرزی مختلف به منظور بررسی صحت روش تحلیلی معرفی شده بر مبنای بسط سری مک لورن، ارائه شده است. در تمام مراحل محاسبه بار کمانشی بحرانی اعضای غیرمنشوری از نرم افزار متلب [۳۳] استفاده شده است. به منظور نشان دادن دقت روش معرفی شده در این مقاله، نتایج حاصله از بسط سری‌های توانی با مقادیر بدست آمده از روش‌های عددی و تحلیلی موجود مقایسه گردیده‌اند.

۱-۶- مثال ۱

در این مثال، یک ستون غیرمنشوری به طول L و صلبیت خمشی EI_0 در ابتدای عضو مطالعه شده است. تغییرات صلبیت خمشی

$$EI \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{EI}{L^2} \left. \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=0} = M_0 = 0 \rightarrow \quad (2-40)$$

$$b_0 y''_0(0) + b_1 y''_1(0) + b_2 y''_2(0) + b_3 y''_3(0) = 0$$

۲- در $x = L$ ($\zeta = 1$)

$$y(1) = \delta_1 = 0 \rightarrow \quad (3-40)$$

$$b_0 y_0(1) + b_1 y_1(1) + b_2 y_2(1) + b_3 y_3(1) = 0$$

$$EI \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=L} = \frac{EI}{L^2} \left. \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=1} = M_1 = 0 \rightarrow \quad (4-40)$$

$$b_0 y''_0(1) + b_1 y''_1(1) + b_2 y''_2(1) + b_3 y''_3(1) = 0$$

- عضو یک سرگیردار- یک سر آزاد

در این حالت تغییر مکان و شیب (دوران) در محل تکیه‌گاه گیردار (ابتدای عضو) مساوی صفر هستند. همچنین مقدار لنگر خمشی و نیروی برشی در انتهای آزاد تیر برابر صفر هستند.

۱- در $x = 0$ ($\zeta = 0$)

$$y(0) = \delta_0 = 0 \rightarrow \quad (1-41)$$

$$b_0 y_0(0) + b_1 y_1(0) + b_2 y_2(0) + b_3 y_3(0) = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{L} \left. \frac{dy}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \theta_0 = 0 \rightarrow \quad (2-41)$$

$$b_0 y'_0(1) + b_1 y'_1(1) + b_2 y'_2(1) + b_3 y'_3(1) = 0$$

۲- در $x = L$ ($\zeta = 1$)

$$EI \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=L} = \frac{EI}{L^2} \left. \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=1} = M_1 = 0 \rightarrow \quad (3-41)$$

$$b_0 y''_0(1) + b_1 y''_1(1) + b_2 y''_2(1) + b_3 y''_3(1) = 0$$

$$\left. \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=L} = \frac{d^3 y}{d\zeta^3} - \frac{PL^2}{EI} \left. \frac{dy}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = V = 0 \rightarrow$$

$$b_0 \left[y'''_0(1) - \frac{PL^2}{EI} y'_0(1) \right] + b_1 \left[y'''_1(1) - \frac{PL^2}{EI} y'_1(1) \right] \quad (4-41)$$

$$+ b_2 \left[y'''_2(1) - \frac{PL^2}{EI} y'_2(1) \right] + b_3 \left[y'''_3(1) - \frac{PL^2}{EI} y'_3(1) \right] = 0$$

- عضو دو سرگیردار

در این حالت تغییر مکان و شیب (دوران) در محل هر دو تکیه‌گاه گیردار (ابتدا و انتهای عضو) مساوی صفر هستند.

۱- در $x = 0$ ($\zeta = 0$)

$$y(0) = \delta_0 = 0 \rightarrow \quad (1-42)$$

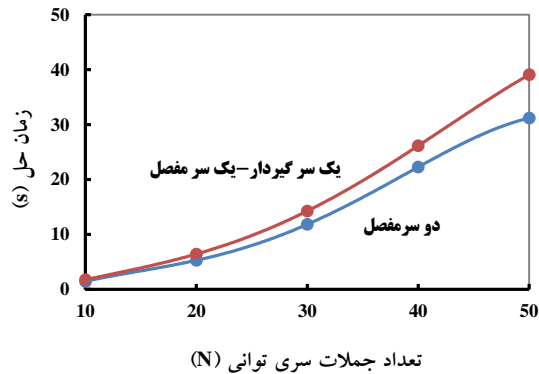
$$b_0 y_0(0) + b_1 y_1(0) + b_2 y_2(0) + b_3 y_3(0) = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{L} \left. \frac{dy}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \theta_0 = 0 \rightarrow \quad (2-42)$$

$$b_0 y'_0(1) + b_1 y'_1(1) + b_2 y'_2(1) + b_3 y'_3(1) = 0$$



نمودار برازش داده شده بایستی به صورت یک چند جمله‌ای با توان ۴ باشد. با توجه به شکل مشخص است که با هر گام در افزایش تعداد جملات سری و به تبع آن بهبود دقت محاسباتی جهت تعیین نمودن بار کماتش الاستیک، مقدار زمان محاسباتی به شدت افزایش می‌یابد.



شکل ۵- تغییرات زمان محاسبات برحسب بالاترین توان تابع تغییر شکل در ادامه، مقدار بار بحرانی نرمال شده برای چهار حالت متفاوت از تغییرات سطح-مقطع در طول عضو (۴ و ۳، ۲، ۱) در جدول (۲) تا (۵) ارائه شده است. همچنین جداول مذکور مقدار درصد خطای نسبی (Δ) بین روش تحلیلی ارائه شده و مقادیر به دست آمده توسط Wang و همکارانش [۱۲] که با استفاده از رابطه زیر محاسبه شده است، را نشان می‌دهند:

$$\Delta(\%) = \frac{|P_{cr}^{Wang} - P_{cr}|}{P_{cr}^{Wang}} \times 100 \quad (46)$$

مطابق آنچه در جدول (۲) تا (۵) نشان داده شده است، افزایش مقدار ضریب b ، منجر به کاهش سطح مقطع و صلبیت خمشی در طول و به خصوص در انتهای دیگر عضو می‌شود. در نتیجه بار کماتش بحرانی کاهش و ناپایداری افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش توان تغییرات و با ثابت ماندن شیب (b)، مقدار بار کماتش بحرانی به علت بزرگتر شدن انتهای دیگر عضو در مقایسه با حالات دیگر افزایش و ناپایداری کاهش می‌یابد. علاوه بر این موارد، مقایسه مقادیر بار کماتشی محاسبه شده با استفاده از روش عددی ارائه شده با نتایج حاصل شده از روش Wang و همکارانش [۱۲] نشان دهنده تطابق بسیار خوب با میزان اختلاف ناچیز می‌باشد.

۶-۲- مثال ۲

در این مثال، یک ستون غیرمنشوری به طول L ، صلبیت خمشی EI_0 در ابتدای عضو و تغییرات صلبیت خمشی به صورت یک

به صورت یک تابع توانی در نظر گرفته شده است. چهار نوع ستون براساس شرایط مرزی (دو سر مفصل، یک سر گیردار، یک سر گیردار- یک سر مفصل و دوسر مفصل) در نظر گرفته شده‌اند. تغییرات سختی خمشی به صورت زیر می‌باشد:

$$EI(x) = EI_0 \times \left(1 - \frac{bx}{L}\right)^a \quad (44)$$

سه تحلیل پایداری برای تغییرات خطی، درجه دو و سه تابع ارائه شده صورت گرفته است. مقدار بار کماتشی نرمال شده مطابق با رابطه (۴۵) محاسبه شده است و با نتایج حاصل شده از روش تحلیلی ارائه شده توسط ونگ مقایسه گردیده‌اند.

$$P_{nor} = P_{cr} \times \frac{L^2}{EI_0} \quad (45)$$

در مرحله نخست، مقدار توان تابع توانی ارائه شده برابر صفر در نظر گرفته شده است که منطبق بر حالتی است که ستون دارای مقطع ثابت در طول خود می‌باشد. در این قسمت سعی بر آن است که مشخص شود با به کار بردن چه تعداد از جملات سری توانی در مراحل محاسبات می‌توان به یک جواب همگرا رسید. همچنین، کفایت و دقت روش موجود را نسبت به جواب‌های بدست آمده از روش تحلیلی ارائه شده توسط Wang و همکارانش [۱۲] نشان داده می‌شود. مقادیر بار بحرانی بی‌بعد حاصل از روش عددی ارائه شده برای ستون با مقطع ثابت و اثر تعداد جملات در نظر گرفته شده در بسط سری توانی در جدول (۱) نشان داده شده‌اند.

با توجه به جدول (۱)، مشخص است که با افزایش تعداد جملات تا ۳۰ جمله، جواب‌ها به سرعت به جواب حاصله از روش ارائه شده توسط Wang و همکارانش [۱۲] همگرا شده‌اند. بنابراین، در تمام مسائل بعدی، برای تعیین مقدار بار کماتشی تعداد جملات سری برای بسط دادن برابر با ۳۰ گرفته خواهد شد. همچنین در این جدول زمان لازم برای انجام مراحل محاسباتی در نرم افزار متلب برای دو شرایط مرزی متفاوت: دو سر مفصل و یک سر گیردار- یک سر مفصل نشان داده شده است. به طور مثال برای عضو دو سر مفصل منشوری در صورت استفاده از ۲۰ جمله در بسط سری توانی حاکم بر فرم تغییر شکل یافته عضو، واحد پردازش مرکزی (CPU) به ۵/۲۹۶ ثانیه زمان نیاز دارد تا بار کماتش بحرانی را به کمک نرم افزار متلب تعیین نماید. در صورت آنکه تعداد جملات استفاده شده دو برابر شوند یعنی ۴۰ جمله، زمان حل تقریباً ۴ برابر می‌شود. در شکل (۵) تاثیر افزایش جملات استفاده شده در بسط سری‌های توانی بر زمان مورد نیاز واحد پردازش مرکزی (CPU) جهت انجام مراحل محاسباتی نشان داده شده است. بهترین



$$EI(x) = EI_0 \cdot e^{\frac{ax}{L}} \quad (47)$$

مقدار بار کمانشی نرمال شده مطابق با رابطه (45) محاسبه شده است و با مقدار دقیق مقایسه گردیده‌اند. این نتایج به همراه مقدار درصد خطا در جدول (6) نشان داده شده‌اند.

تابع نمایی مطابق رابطه (47) در نظر گرفته شده است. همچنین چهار نوع شرایط مرزی متفاوت برای این ستون به صورت: دو سرمفصل، یک سر گیردار، یک سر گیردار-یک سر مفصل و دوسر گیردار در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- روند همگرایی بار کمانشی بحرانی نرمالایز شده حاصل از روش سری توانی برای ستون با مقطع ثابت به مقدار دقیق و زمان حل

Wang و همکارانش [۱۲]	تعداد جملات بسط سری توانی					شرایط مرزی
	N=50	N=40	N=30	N=20	N=10	
9/870	9/8696 (31/1915 s)	9/8696 (22/2791 s)	9/8696 (11/8441 s)	9/8696 (5/2960 s)	9/4780 (1/4609 s)	دوسر مفصل
2/467	2/4674	2/4674	2/4674	2/4674	2/4669	یک سر گیردار
39/480	39/4784	39/4784	39/4784	39/4916	23/6819	دو سر گیردار
20/190	20/1907 (39/0886 s)	20/1907 (26/1555 s)	20/1907 (14/2712 s)	20/1908 (6/4398 s)	15/5192 (1/7612 s)	یک سر گیردار-یک سر مفصل

جدول ۲- مقایسه بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون‌ها با تغییرات خطی مقطع در روش سری توانی با مقدار دقیق (a=1)

ستون C-P			ستون C-C			ستون C-F			ستون P-P			a
Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	
0/010	19/168	19/170	0/011	37/476	37/480	0/000	2/393	2/393	0/000	9/372	9/372	0/1
0/029	17/035	17/030	0/009	33/273	33/270	0/000	2/235	2/235	0/000	8/343	8/343	0/3
0/007	14/739	14/740	0/010	28/697	28/700	0/000	2/062	2/062	0/000	7/256	7/256	0/5

جدول ۳- مقایسه بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون‌ها با تغییرات خطی مقطع در روش سری توانی با مقدار دقیق (a=2)

ستون C-P			ستون C-C			ستون C-F			ستون P-P			a
Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	
0/005	18/189	18/190	0/000	35/560	35/560	0/000	2/319	2/319	0/000	8/893	8/893	0/1
0/007	14/291	14/290	0/000	27/910	27/910	0/000	2/012	2/012	0/000	7/005	7/005	0/3
0/028	10/527	14/739	0/000	20/481	20/480	0/000	1/683	1/683	0/000	5/198	5/198	0/5

جدول ۴- مقایسه بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون‌ها با تغییرات خطی مقطع در روش سری توانی با مقدار دقیق (a=3)

ستون C-P			ستون C-C			ستون C-F			ستون P-P			a
Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	Δ(%)	PSM	حل دقیق [۱۲]	
0/012	17/252	17/250	0/006	33/728	33/730	0/000	2/246	2/246	0/024	8/434	8/436	0/1
0/025	11/923	11/920	0/004	23/291	23/290	0/000	1/798	1/798	0/000	5/840	5/840	0/3
0/000	7/362	7/362	0/042	14/344	14/350	0/000	1/336	1/336	0/000	3/628	3/628	0/5



جدول ۵- مقایسه بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون‌ها با تغییرات خطی مقطع در روش سری توانی با مقدار دقیق ($a = \Delta$)

a	ستون P-P			ستون C-F			ستون C-C			ستون C-P		
	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$
۰/۱	۷/۹۹۴	۷/۹۹۴	۰/۰۰۰	۲/۱۷۵	۲/۱۷۵	۰/۰۰۰	۳۱/۹۸۰	۳۱/۹۷۷	۰/۰۰۹	۱۶/۳۵۰	۱۶/۳۵۴	۰/۰۲۴
۰/۳	۴/۸۳۶	۴/۸۳۶	۰/۰۰۰	۱/۵۹۵	۱/۵۹۵	۰/۰۰۰	۱۹/۳۴۰	۱۹/۳۴۴	۰/۰۲۱	۹/۸۹۳	۹/۸۹۳	۰/۰۰۰
۰/۵	۲/۴۶۷	۲/۴۶۷	۰/۰۰۰	۱/۰۲۹	۱/۰۲۹	۰/۰۰۰	۹/۸۶۹	۹/۸۰۷	۰/۶۲۸	۵/۰۴۸	۵/۰۵۸	۰/۱۹۸

جدول ۶- مقایسه بار کمانش بحرانی نرمالایز شده ستون غیرمنشوری با تغییرات نمایی سختی خمشی در روش سری توانی با مقدار دقیق

a	ستون P-P			ستون C-F			ستون C-C			ستون C-P		
	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$	حل دقیق [۱۲]	PSM	$\Delta(\%)$
-۰/۱	۹/۳۸۰	۹/۳۸۶	۰/۰۶۴	۲/۳۹۴	۲/۳۹۴	۰/۰۰۰	۳۷/۵۵۰	۳۷/۵۴۵	۰/۰۱۳	۱۹/۲۰۰	۱۹/۲۰۲	۰/۰۱۰
-۰/۵	۷/۶۳۴	۷/۶۳۵	۰/۰۱۳	۲/۱۱۰	۲/۱۱۲	۰/۰۹۵	۳۰/۶۰۰	۳۰/۵۹۸	۰/۰۰۷	۱۵/۶۴۰	۱۵/۶۳۹	۰/۰۰۶
-۱/۰	۵/۸۲۷	۵/۸۲۷	۰/۰۰۰	۱/۷۸۲	۱/۷۸۲	۰/۰۰۰	۲۳/۴۹۰	۲۳/۴۹۰	۰/۰۰۰	۱۱/۹۹۰	۱۱/۹۸۸	۰/۰۱۷
-۱/۵	۴/۳۸۹	۴/۳۸۸	۰/۰۲۳	۱/۴۸۰	۱/۴۸۰	۰/۰۰۰	۱۷/۸۶۰	۱۷/۸۶۴	۰/۰۲۲	۹/۰۹۸	۹/۰۹۸	۰/۰۰۰
-۲/۰	۳/۲۶۴	۳/۲۶۳	۰/۰۳۱	۱/۲۰۹	۱/۲۰۹	۰/۰۰۰	۱۳/۴۶۰	۱۳/۴۵۴	۰/۰۴۵	۶/۸۳۹	۶/۸۳۹	۰/۰۰۰

مقدار ویژه مقدار بار کمانشی عضو مدنظر محاسبه گردید. روش معرفی شده را می‌توان برای تحلیل پایداری انواع مختلفی از ستون با مقطع متغیر مورد استفاده قرار داد. پس از بررسی نتایج مثال‌های عددی ارائه شده، ذکر موارد زیر ضروری است:

۱- تطابق بسیار عالی میان نتایج محاسبه شده برای نیروی کمانش بحرانی با استفاده از روش ارائه شده و روش‌های عددی و تحلیلی دیگر وجود دارد.

۲- تنها با به کار بردن حداقل ۲۰ جمله از بسط سری توانی، مقادیر بار کمانشی برای اعضای غیرمنشوری را می‌توان با میزان خطای کمتر از ۱٪ بدست آورد.

۳- با افزایش تعداد جملات در بسط سری توانی به بیش از ۳۰ جمله، میزان خطای نسبی (Δ) به سرعت به زیر ۰/۵٪ کاهش می‌یابد.

۴- روش ارائه شده قابل استفاده برای تحلیل کمانشی ستون با مقطع ثابت نیز است.

۵- در یک ستون با شرایط تکیه گاهی معین، با افزایش شیب تغییرات و کاهش شدیدتر سطح مقطع در طول، بار کمانش بحرانی کاهش و ناپایداری افزایش می‌یابد.

۶- برای یک ستون با ابعاد مشخص، تغییر نوع تکیه‌گاه‌های انتهایی و افزایش شرایط گیرداری منجر به افزایش درجات

با توجه به جدول (۶)، مشاهده می‌شود که با کاهش مقدار ضریب در توان تابع نمایی و در نتیجه کاهش سطح مقطع، بار کمانش بحرانی و میزان پایداری ستون کاهش می‌یابد. همچنین با ثابت ماندن توان تابع نمایی، افزایش شرایط گیرداری و به تبع آن افزایش درجات نامعینی ستون، منجر به افزایش بار کمانش بحرانی و پایداری خواهد شد. مقایسه نتایج حاصله از روش سری توانی با نتایج دقیق نشان می‌دهد که دقت و صحت بسیار خوبی میان مقادیر بار کمانش بحرانی الاستیک بدست آمده از مطالعه موجود و آنچه با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده توسط Wang و همکارانش [۱۲] محاسبه شده است، وجود دارد.

۷- نتیجه‌گیری

در مطالعه انجام شده، یک مسیر تحلیلی جدید بر اساس ترکیب روش سری‌های توانی و بسط مک لورن به منظور محاسبه بار کمانشی اعضای غیرمنشوری ارائه گردید. در ابتدا، بسط مک لورن تابع ممان اینرسی مقطع متغیر ستون مدنظر نوشته شد. سپس با استفاده از روش بسط سری‌های توانی، معادله دیفرانسیل حاکم بر پایداری ستون باریک شونده حل گردید. در ادامه، با اعمال شرایط مرزی حاکم بر هر دهانه عضو فرم تقریبی تغییر شکل کمانشی حاصل و با استفاده از روش حل مسئله

نامعینی و بار کمانش بحرانی خواهد شد و نهایتاً افزایش پایداری ستون را در پی خواهد داشت.

۸- مراجع

- [19] Atay, M.T. (2009), "Determination of critical Buckling Loads for Variable Stiffness Euler Columns Using Homotopy Perturbation Method", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 10, No. 2, pp. 199–206.
- [20] Okay, F., Atay, M.T. and Coçkun, S.B. (2010), "Determination of Buckling Loads and Mode Shapes of a Heavy Vertical Column Under its Own Weight Using the Variational Iteration Method", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 11, No. 10, pp. 851–857.
- [21] Shahba, A. and Rajasekaran, S. (2012), "Free Vibration and Stability of Tapered Euler–Bernoulli Beams Made of Axially Functionally Graded Material", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 3094–3111.
- [22] Pradhan, K.K. and Chakraverty, S. (2013), "Free Vibration of Euler and Timoshenko Functionally Graded Beams by Rayleigh-Ritz Method". *Composites: Part B*, Vol. 51, pp. 175–184.
- [23] Pradhan, K.K. and Chakraverty, S. (2015), "Generalized Power-Law Exponent Based Shear Deformation Theory for Free Vibration of Functionally Graded Beams", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 268, pp. 1240–1258.
- [24] Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T. and Nguyen, T.K. (2016), "An Analytical Method for the Vibration and Buckling of Functionally Graded Beams under Mechanical and Thermal Loads", *Composites: Part B*, Vol. 100, pp. 152–163.
- [25] Paul, A. and Das, D. (2016), "Free Vibration Analysis of Pre-stressed FGM Timoshenko Beams under large transverse deflection by a variational method", *Engineering Science and Technology, an International Journal*, Vol. 19, No. 2, pp. 1003–1017.
- [26] Soltani, M. and Sistani, A. (2017), "Elastic Stability of Columns with Variable Flexural Rigidity under Arbitrary Axial Load Using the Finite Difference Method", *Numerical methods in civil engineering*, Vol. 1, No. 4, pp. 23–31.
- [27] Eisenberger, M., Clastornik J, 1987. "Beams on variable two-parameter elastic foundation". *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10), pp.1454–1466.
- [28] Al-Sadder, S.Z. (2004), "Exact Expression for Stability Functions of a General Non-Prismatic Beam-Column Member", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 60, pp. 1561–1584.
- [29] Kim, N-II, Fu, C.C. and Kim, M-Y. (2007), "Stiffness Matrices for Flexural–Torsional/Lateral Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, pp. 739–756.
- [30] Huang, Y., Yang, L.E. and Luo, Q.Z. (2013), "Free Vibration of Axially Functionally Graded Timoshenko Beams with Non-Uniform Cross-Section", *Composites: Part B*, Vol. 45, pp. 1493–1498.
- [31] Soltani, M., Asgarian, B. and Mohri, F. (2014), "Buckling and Free Vibration Analyses of Tapered Thin-Walled beams by Power Series Method", *Journal of constructional steel research*, Vol. 96, pp. 106–126.
- [32] Soltani, M. and Mohri, F. (2016), "Stability and Vibration Analyses of Tapered Columns Resting on One or Two-Parameter Elastic Foundations", *Numerical methods in civil engineering*, Vol. 2, pp. 57–66.
- [33] MATLAB Version7.6.MathWorks Inc, USA, 2008.
- [1] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), "Theory of Elastic Stability", McGraw Hill, New York.
- [2] Chen, W.F. and Lui, E.M. (1987), "Structural Stability, Theory and Implementation", New York, Elsevier.
- [3] Bazant, Z.P. and Cedolin, L. (1991), "Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories", New York, Dover Publications.
- [4] Gere, J.M. and Carter, W.O. (1962), "Critical Buckling Loads for Tapered Columns", *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 88, No. 1, pp. 1–11.
- [5] Frisch-Fay, R. (1962), "On the Stability of a Strut under Uniformly Distributed Axial Forces", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 2, No. 3, pp. 361–369.
- [6] Ermopoulos, J. (1977), "Equivalent Buckling Length of Non-uniform Members", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 42, No. 4, pp. 141–158.
- [7] Iromenger, M.J. (1980), "Finite Difference Buckling Analysis of Non-uniform Columns", *Computers & Structures*, Vol. 12, No. 5, pp. 741–748.
- [8] Smith, W.G. (1988), "Analytical Solution for Tapered Column Buckling", *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 5, pp. 677–681.
- [9] Arbabi, F. and Li, F. (1991), "Buckling of Variable Cross-Section Columns: Integral Equation Approach", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, No. 8, pp. 2426–2441.
- [10] Siginer, A. (1992), "Buckling of Columns of Variable Flexural Rigidity", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 3, pp. 543–640.
- [11] Sampaio, J.H.B. and Hundhausen, J.R. (1998), "A Mathematical Model and Analytical Solution for Buckling of Inclined Beam-Columns", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 22, No. 6, pp. 405–421.
- [12] Wang, C.M., Wang, C.Y. and Reddy, J.N. (2005), "Exact Solutions for Buckling of Structural Members", CRC Press LLC, Florida.
- [13] Li, Q.S., Cao, H. and Li, G. (1994), "Stability Analysis of Bars with Multi-Segments of Varying Cross-Section", *Computers and Structures*, Vol. 53, No. 5, pp. 1085–1089.
- [14] Li, Q.S., Cao, H. and Li, G. (1995), "Stability Analysis of Bars with Varying Cross-Section", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, No. 21, PP. 3217–3228.
- [15] Li, Q.S., Cao, H. and Li, G. (1996), "Static and Dynamic Analyses of Straight Bars with Variable Cross-Section", *Computers and Structures*, Vol. 59, No. 6, pp. 1185–1191.
- [16] Rahai, A.R and Kazemi, S. (2008), "Buckling Analysis of Non-Prismatic Column Based on Modified Vibration Method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, pp. 1721–1735.
- [17] Coçkun, S.B. and Atay, M.T. (2009), "Determination of Critical Buckling Load for Elastic Columns of Constant and Variable Cross-Sections Using Variational Iteration Method", *Computers and Mathematic with Applications*, Vol. 58, No. 11-12, pp. 2260–2266.
- [18] Atay, M.T. and Coçkun, S.B. (2009), "Elastic Stability of Euler Columns with a Continuous Elastic Restraint Using Variational Iteration Method", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 11-12, pp. 2528–2534.

