

واکاوی کشسان - مومسان چند خرپا دارای تغییر شکل های بزرگ

مجید یعقوبی^{۱*}، محمد رضایی پژند^۲، محسن صداقت جو^۳

۱- استادیار، مهندسی عمران و معماری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه، تربت حیدریه

۲- استاد، مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

۳- دانش آموخته کارشناسی، مهندسی عمران و معماری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه، تربت حیدریه

*majidyaghoobi@torbath.ac.ir، ۹۵۱۶۱۶۸۵۹۵، صندوق پستی

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۰۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۱۰)

چکیده

اهمیت تحلیل ناخطی هندسی و ماده خرپاها بر کسی پوشیده نیست. همچنین، همگان از اهمیت رابطه‌های بسته‌ی رفتار سازه‌ها باخبرند. با این همه، حجم زیاد راه‌حل‌ها، انجام این گونه از واکاوی‌ها را به صورت صریح برای سازه‌ها ناشدنی و یا خیلی دشوار می‌کند. تنها در خرپاهای ساده می‌توان به یک پاسخ بسته برای تحلیل ناخطی هندسی و ماده دست یافت. به طور گسترده، واکاوی‌های ناخطی خرپاها توسط روش‌هایی همچون جزء محدود انجام می‌پذیرد. تا کنون، پژوهش‌گران روش‌های زیادی برای تحلیل ناخطی خرپا پیشنهاد نموده‌اند. فن‌های نو با کمک آزمون‌های سنگ نشانه راست‌آزمایی می‌شوند. از این دیدگاه، داشتن پاسخ صریح آزمون‌های سنگ نشانه از اهمیت بسیاری برخوردار است. در این مقاله، چند خرپای ساده‌ی دوبعدی و سه‌بعدی به صورت تحلیلی واکاوی می‌شوند. این کار با پنداشت تغییر شکل‌های بزرگ به همراه رفتار کشسان-مومسان انجام خواهد گرفت. برای نمایش رفتار ماده، از نمودار دوخطی بهره‌جویی می‌شود. با کمک کرنش گرین، تابع کارمایه‌ی کرنشی برپا می‌گردد. از کمینه‌سازی کارمایه‌ی کل، معادله‌های ایستایی به دست می‌آیند. همچنین، صفر کردن مقادیرهای ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی، حد پایداری را در دسترس قرار می‌دهد. با واکاوی کرنش عضوهای خرپا در بازه‌ی پایدار مسیر ایستایی، نمودار بار-جابجایی در اختیار قرار خواهد گرفت. به خاطر باید سپرد، تابع چندرابطه‌ای مسیر ایستایی هر خرپا را می‌توان برای راست‌آزمایی فن‌های نوین تحلیل ناخطی به‌کاربرد.

واژگان کلیدی

واکاوی ناخطی خرپا، کشسان-مومسان، تغییر شکل‌های بزرگ، مسیر ایستایی، رابطه‌های بسته

Elastic-plastic analysis of some trusses with large deformations

M. Yaghoobi, M. Rezaiee-Pajand, M. Sedaghatjo

Abstract

The importance of geometric and material nonlinear analysis in trusses is not deniable. Furthermore, everyone knows the importance of closed-form solution to the behavior of structures. However, the solution volumes make this type of analysis impossible or very difficult for most structures. Closed-form solution only for a few simple trusses, with geometric and material nonlinearities, can be obtained. Elastic analysis of trusses is widely performed by the methods, such as, the finite element scheme. So far, researchers have proposed many approaches for truss nonlinear analysis. New techniques are validated by the benchmark problems. In this view, it is important to have an explicit solution for this purpose. In this paper, some simple two and three-dimensional trusses are analyzed analytically. This study considers both large deformations with elastic-plastic behavior simultaneously. The behavior of material is assumed to have a bilinear diagram. The strain energy function is obtained in terms of the Green strain. Equilibrium equations are satisfied by minimizing total energy. At the point, in which determinant of the tangent matrix becomes zero, structural instability is found. The load-displacement graph is obtained by analyzing the strain of the truss members in the stable range of the equilibrium path. It is important to know that the multi-relational function of the equilibrium path of each truss can be applied to test the accuracy of new nonlinear analysis techniques.

Keywords

Nonlinear analysis of truss, Elastic-plastic, Large deformation, Equilibrium path, Closed-form solution

تحلیل پایداری سازه‌ها به روش خطی و ناخطی مواد از دیرباز تاکنون مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران بوده است. امروزه کاربرد گسترده‌ی خرپاهای هرمی به عنوان یک سازه یا بخشی از سازه‌های پیچیده همچون نانو سازه‌های کرنی تک لایه، گنبد‌های بزرگ ساخته شده با سطح‌های هندسی، گنبد‌های میله‌ای بزرگ، خرپاها و پوسته‌های شبکه‌ای دولایه، توجه پژوهش‌گران را به خود جلب کرده است. انجام پایداری ایستایی پوسته‌های شبکه‌ای تک‌لایه و خرپاهای صفحه‌ای و هرمی با تلاش‌های فون مایسز در سال ۱۹۸۰ آغاز شد. خرپای فون مایسز نمونه‌ای دوبعدی و ساده از این گونه ساختارهاست. این سازه‌ی صفحه‌ای متقارن با عمق کم، دو عضو دارد. با وارد آمدن یک بار عمودی در تاج آن، ناپایداری همراه با فروجهش اتفاق می‌افتد. برای نخستین بار از این الگو برای شناسایی گونه‌های ناپایداری ساختاری استفاده شد. از تکرار یک‌گانه‌ی خرپایی هرمی، می‌توان سازه‌ها و پوسته‌های شبکه‌ای آفرید. این سازه‌ها می‌توانند در طرح سازه‌های سبک‌وزن ساندویچی به کار روند [۳-۱]. اهمیت فراوان تحلیل کمانش سازه‌های خرپایی و پوسته‌های شبکه‌ای بر همگان آشکار شده است. پژوهش‌گران از روش‌های تکراری که بر پایه‌ی راهکار جزء محدود ناخطی استوارند، برای واکاوی رفتار این سازه‌ها و یافتن مسیر ایستایی بهره می‌گیرند.

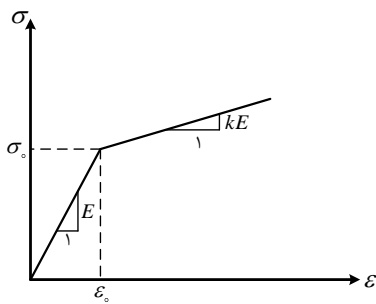
Kala و **Kalina** [۴] و نیز **Kwasniewski** [۵] مسیرهای فروجهش و تعادل ایستایی خرپای سنتی فون مایسز را به دست آوردند. پس از آن، اثر کاستی‌های هندسی در رفتار این سازه‌ها توسط **Psotny** [۶] و همچنین، **Kalina** [۷] واکاوی شد. به تازگی، **Halpern** و **Adriaenssens** کمانش درون‌صفحه‌ای قوس‌های خرپای دوبعدی را بررسی نمودند [۸]. از سوی دیگر، در سال ۲۰۱۸، **Plaut** جابه‌جایی یک‌طرفه‌ی گنبد‌های کم‌عمق زیر فروجهش را به دست آورد [۹]. **Bazzucchi** و همکارانش در سال ۲۰۱۷ اندرکنش میان کمانش اولیری و فروجهش در خرپای صفحه‌ای فون مایسز با کاستی نخستین را بر حسب نسبت‌های لاغری و عمق بررسی کردند [۱۰]. سپس، آن‌ها به اثر عامل‌های لاغری و عمق، شرط‌های تکیه‌گاهی و الگوهای کاستی نخستین بر ظرفیت باربری یک سازه‌ی قوسی فون مایسز دست یافتند [۱۱]. با وارد آمدن نیروی محوری، جزءها می‌توانند به حد تسلیم برسند و تغییرشکل‌های کشسان-مومسان در اعضا ایجاد شود. بررسی مسأله‌ی پایداری کشسان-مومسان ایستا و پویای پوسته‌های شبکه‌ای یک لایه توسط **Fan** و

همکارانش [۱۲] و نیز **Zhi** و همکارانش [۱۳] به انجام رسید. **Gerstmayr** و **Irschik** نوسان کشسان-مومسان یک پاندول را واکاوی نمودند [۱۴]. در پژوهشی دیگر، **Savi** و **Pacheco** پاسخ پویای کشسان-مومسان یک نوسانگر دارای سخت‌شوندگی جنبشی و همسانگرد را در دسترس قرار دادند [۱۵]. با توجه به کاربرد فراوان خرپاهای فضایی بزرگ، اهمیت تحلیل پایداری این سازه‌ها بر همگان آشکار شده است. به تازگی، رفتار گنبد‌های دگردیسی پیش‌تنیده و پانل‌های مرکب توسط **Brinkmeyer** و همکارانش مطالعه شد [۱۶ و ۱۷]. همچنین، در سال ۲۰۱۶ **Feng** و همکارانش رفتار مکانیکی سازه‌های شبکه‌ای خرپای ساعت شنی را بررسی کردند [۱۸]. آزمایش پاسخ بالستیک خرپاهای شبکه‌ای هرمی مرکب توسط **Yungwirth** و همکارانش انجام شد [۱۹]. در سال ۲۰۱۷ وضعیت داشتن دو مسیر پایداری برای سازه‌های ناخطی هندسی توسط **Danso** و **Karpov** بررسی شد [۲۰]. **Wang** و همکارانش رفتار پانل‌های خرپایی با هسته‌ی کاگم را در سال ۲۰۰۳ به دست آوردند [۲۱]. در سال ۲۰۰۶ **Ligaro** و **Valvo** رفتار کشسان ایستایی خرپاهای فضایی هرمی را واکاوی کردند. آن‌ها به شیوه‌ی تحلیلی، کارمایه‌ی داخلی را با وارد کردن تغییرشکل‌های کشسان متوسط و عدم کمانش یا مومسانی موضعی، یافتند. سپس، آن‌ها کارمایه‌ی درونی را ثابت پنداشتند و معادله‌های ناخطی ایستایی، ماتریس سختی و عامل‌های پایداری را به صورت تحلیلی حساب کردند [۲۲].

در سال‌های ۲۰۱۴ و ۲۰۱۸، **Castro** [۲۳] و **Orlando** و همکارانش [۲۴] معادله‌های ناخطی حرکت برای خرپای هرمی کشسان کم عمق زیر نیروی هارمونیک را بررسی نمودند. در سال‌های اخیر، پایداری کشسان-مومسان خرپاهای صفحه‌ای و سه‌بعدی و نیز پوسته‌های شبکه‌ای توجه بسیاری از پژوهش‌گران را به خود جلب کرده است. به خاطر باید سپرد که واکاوی پایداری کشسان-مومسان بسیار پیچیده‌تر از تحلیل‌های کشسان سازه‌ها می‌باشد. نکته‌ی مهمتر اینکه همزمانی تحلیل ناخطی هندسی و ماده بر پیچیدگی مسأله می‌افزاید. در این مقاله، رابطه‌ی صریح مسیر ایستایی چند خرپا با رفتار کشسان-مومسان حساب می‌شود. برای انجام این کار، رفتار دوخطی برای نمودار تنش و کرنش ماده پنداشته خواهد شد. در یافتن معادله‌ی حاکم بر سازه، از پنداشت‌های تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش گرین نیز بهره‌جویی می‌شود. خاطر نشان می‌کند، از پاسخ صریح مسیر ایستایی این خرپاها می‌توان برای آزمون سنگ‌نشانه‌ی راهکارهای نو واکاوی‌های ناخطی هندسه و ماده بهره‌جست. دو خرپای صفحه‌ای و دوخرپای سه‌بعدی در ادامه‌ی کار بررسی



خواهند شد.



شکل ۱- رابطه دوخطی تنش-کرنش مواد

معیار تسلیم یا کرنش مرز کشسان-مومسان جزء برابر با ϵ_0 می‌باشد. کارمایه کرنشی عضو پس از ورود به بازه مومسانی از رابطه زیر حساب خواهد شد:

$$U = \frac{1}{2} A_0 L_0 E (\epsilon_0)^2 + A_0 L_0 E (\epsilon - \epsilon_0) \epsilon_0 + \frac{1}{2} A_0 L_0 k E (\epsilon - \epsilon_0)^2 \quad (6)$$

با کمینه کردن کارمایه کل، معادله‌های تعادل در دسترس قرار می‌گیرند. برای این کار، مشتق کارمایه نهفته کل نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، برابر با صفر خواهد بود. افزون بر این، مشتق دوم این تابع، ماتریس سختی مماسی را به دست می‌دهد. از مقادیر ویژه و ویژه‌ی این ماتریس برای یافتن شرط‌های ناپایداری سازه بهره‌جویی می‌گردد. باید آگاه بود، جابه‌جایی‌های گرهی، که مقادیر ویژه ماتریس سختی مماسی را برابر صفر کنند، ناپایداری سازه را به همراه خواهند داشت.

۳- رابطه‌ی صریح مسیر پایداری چند خرپا

در این مقاله، رابطه‌ی بسته یا صریح میان نیرو و تغییر مکان چند خرپا در رفتار ناخطی همزمان ماده و هندسه پیدا می‌شود. برای این کار، از چند خرپای ساده در حالت‌های صفحه‌ای و سه‌بعدی بهره‌جویی می‌گردد. با افزایش شمار درجه‌های آزادی و پیچیده‌تر شدن رفتار سازه، یافتن مسیر تعادل بسیار دشوار و یا نشدنی خواهد شد. در تمامی خرپاهایی که در ادامه خواهند آمد، سطح مقطع عضوها برابر با مقدار ثابت A_0 می‌باشند. همچنین، همه‌ی طول‌های سازه ضریبی از l خواهند بود.

۳-۱- واکاوی خرپای صفحه‌ای سه‌عضوی

شکل (۲) خرپای صفحه‌ای با سه عضو را نشان می‌دهد. برای بررسی این خرپا، دستگاه مختصی XY در نقطه‌ی A بنا می‌گردد. این سازه دو درجه آزادی x و y در گره A ، به ترتیب، در راستاهای X و Y دارد. بزرگی بار وارد به خرپا در نقطه‌ی A

۲- کارمایه کرنشی خرپا

کارمایه نهفته‌ی کل خرپا، π ، از دو بخش کارمایه کرنشی، U ، و کارمایه خارجی، V ، شکل می‌گیرد. کارمایه خارجی اثر بارها را وارد واکاوی می‌سازد. اگر $\{q\}$ و $\{u\}$ به ترتیب، بردار بارهای ثابت گرهی و بردار جابه‌جایی‌های گرهی را نشان دهند، برابری‌های زیر برقرار می‌باشند:

$$\pi = U + V \quad (1)$$

$$V = -\{q\}^T \{u\} \quad (2)$$

هر عضو خرپا تنها یک نیروی محوری دارد. بر این پایه، در آن فقط یک کرنش و تنش محوری به وجود می‌آید. در حالت کشسان خطی، کارمایه کرنشی هر عضو خرپا به آسانی حساب می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} A_0 L_0 E \epsilon^2 \quad (3)$$

$$\epsilon = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \quad (4)$$

در این رابطه، A_0 مساحت مقطع، L_0 طول اولیه و E ضریب کشسانی عضو خرپایی می‌باشند. همچنین، ϵ کرنش محوری عضو است. در رابطه‌سازی لاگرانژی کامل، کرنش گرین-لاگرانژ و تنش پیولا-کریشهف به‌کار می‌روند. برای یافتن کرنش ϵ از رابطه‌ی کرنش گرین-لاگرانژ به صورت برابری (۴) بهره‌جویی می‌گردد. L طول عضو بعد از تغییر شکل را نشان می‌دهد. با جمع کارمایه‌های کرنشی جزءهای خرپا و بهره‌بردن از کارمایه خارجی، کارمایه کل خرپا در حالت کشسان خطی به شکل زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_0 L_0 E \epsilon^2)_i - \{q\}^T \{p\} \quad (5)$$

در این برابری، n شمار جزءهای خرپا را نشان می‌دهد. کارمایه کرنشی هر جزء تا مرز مومسانی از رابطه‌ی (۳) به‌دست می‌آید. با ورود جزء به بازه مومسانی، کارمایه کرنشی برپایه‌ی ضریب کشسانی وابسته حساب خواهد شد. برای نمایش رفتار مومسان خرپا، از تابع دوخطی شکل (۱) برای ماده بهره‌جویی می‌شود. این نمودار برای بخش نخست، دارای ضریب کشسانی E است و برای ناحیه‌ی مومسان شیب ثابت kE دارد. خاطر نشان می‌کند، این الگوی مومسانی برای بارگذاری افزایشی شایسته است و مناسب بارچرخه‌ای نیست.

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{A_0 E}{64000l^3} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 9216l^2 + 2024x^2 + 8096ly + 1012(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$k_2 = 8096lx + 2024xy$$

$$k_3 = 32384l^2 + 24288ly + 2024y^2 + 1012(x^2 + y^2)$$

مقدارهای ویژه و ماتریس سختی مماسی، برای یافتن حالت‌های ناپایداری خرپا به کار می‌روند. دو مقدار ویژه برای این ماتریس سختی مماسی به صورت زیر وجود دارد:

$$\det(K_T - \omega I) = 0 \quad (12)$$

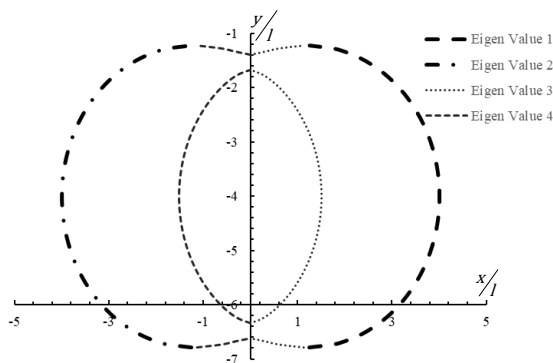
$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{A_0 E}{16000l^3} \right) (c + d) \\ \omega_2 = \left(\frac{A_0 E}{16000l^3} \right) (c - d) \end{cases} \quad (13)$$

$$c = 5200l^2 + 506x^2 + 4048ly + 506y^2$$

$$d = \sqrt{\frac{8386816l^4 + 2631200l^2x^2 + 64009x^4 + 117230058l^3y + 1024144lx^2y + 64009y^4 + 5561952l^2y^2 + 128018x^2y^2 + 10241ly^3}{16000l^3}} \quad (14)$$

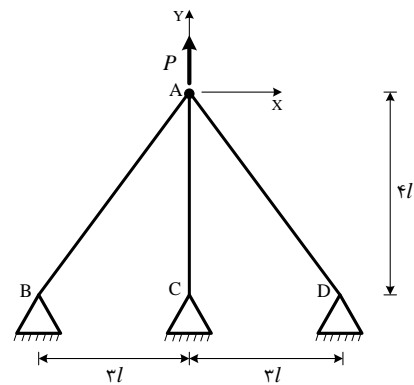
با صفر شدن مقدارهای ویژه، رابطه‌هایی به صورت زیر میان اندازه‌های جابه‌جایی‌های گرهی پدیدار می‌گردد. این رابطه‌ها وابسته به وضعیت‌های ناپایدار خرپا می‌باشند. شکل (۳) نمودار جابه‌جایی‌های وابسته به این وضعیت را نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{\frac{-5200l^2 - 6072ly - 759y^2 + 16\sqrt{l^2(-112967l^2 - 13662y(y-8l))}}{\sqrt{759}}}}{\sqrt{759}} \\ x = \pm \frac{\sqrt{\frac{-5200l^2 - 6072ly - 759y^2 - 16\sqrt{l^2(-112967l^2 - 13662y(y-8l))}}{\sqrt{759}}}}{\sqrt{759}} \end{cases} \quad (15)$$



شکل ۳- نمودار جابه‌جایی‌های گرهی وابسته به مقدارهای ویژه صفر در گام نخست

در جهت مثبت محور Y برابر با P می‌باشد.



شکل ۲- هندسه و بارگذاری خرپای صفحه‌ای

نخست، طول پسین هر عضو پس از جابه‌جایی‌های بزرگ گره A حساب می‌شود. سپس، با بهره‌جویی از رابطه‌های (۳) و (۴)، تابع کارمایه‌های کرنشی تمامی اعضا در دسترس قرار می‌گیرد. به دنبال این‌ها، با افزودن کارمایه‌ی بار خارجی، می‌توان کارمایه‌ی نهفته‌ی کل خرپا را به صورت زیر به دست آورد:

$$U = \frac{A_0 E}{8l^3} \left[\frac{((x+3l)^2 + (y+4l)^2 - 25l^2)^2}{125} + \frac{((x-3l)^2 + (y+4l)^2 - 25l^2)^2}{125} + \frac{((x)^2 + (y+4l)^2 - 16l^2)^2}{64} \right] \quad (7)$$

$$\pi = \frac{A_0 E}{64000l^3} \left[\frac{4048ly(x^2 + y^2) + 253(x^2 + y^2)^2}{64l^2(72x^2 + 253y^2)} \right] - py \quad (8)$$

آشکار است که در کارمایه‌ی نهفته‌ی کل سازه دو جابه‌جایی گرهی x و y حضور دارند. کمینه‌سازی این تابع نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، رابطه‌های (۹) و (۱۰) را نتیجه می‌دهد. این معادله‌ها مسیر ایستایی را برای رفتار کشسان ماده مشخص می‌نمایند. برای شناسایی وضعیت ناپایداری نیاز به برپایی ماتریس سختی مماسی است. با یافتن مشتق دوم کارمایه‌ی کرنشی کل خرپا نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، ماتریس سختی مماسی به صورت زیر برای رفتار کشسان ماده در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{A_0 E}{64000l^3} (9216l^2x + 8096lxy + 1012x(x^2 + y^2)) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{A_0 E}{64000l^3} \left(\frac{32384l^2y + 8096ly^2 + 4048l(x^2 + y^2) + 1012y(x^2 + y^2)}{1012y(x^2 + y^2)} \right) - p = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = \frac{4}{253}(-253 \pm \sqrt{27577})l \\ f_1 = \pm \frac{24196}{7l^3} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \frac{4}{3}(-3 \pm \sqrt{3})l \\ f_2 = \pm \frac{24929}{2l^3} \end{cases}$$

هر چهار جابه‌جایی گرهی کنونی در راستای منفی y می‌باشند. پاسخ y با کمترین اندازه‌ی قدرمطلق، نقطه‌ی ناپایداری را نشان می‌دهد. بنابراین، خرپا در نقطه با $y = -1/3745l$ روی مسیر ایستایی اولیه ناپایدار خواهد شد. اینک، حالت قرارگیری در بازه‌ی کشسان برای این نقطه بررسی می‌شود. نخست، کرنش هر یک از عضوهای خرپا در جابه‌جایی‌های گرهی $x = 0$ و $y = -1/3745l$ به دست می‌آیند. در نقطه‌ی ناپایداری، کرنش عضوهای AB و AD برابر با $-0/2199$ و کرنش در عضو AC برابر با $-0/3436$ خواهد بود. از سوی دیگر، برپایه‌ی شکل (۱) کرنش نهایی رفتار کشسان برابر با $\epsilon_0 = 0/002$ می‌باشد. از این رو، تمامی اعضا در نقطه ناپایداری خرپا از حالت کشسان خارج شده‌اند. بنابراین، بایستی جابه‌جایی‌های گرهی وابسته به نخستین ورود به ناحیه‌ی مومسان را در مسیر ایستایی اولیه یافت. در این مسیر، جابه‌جایی گرهی x برابر با صفر است. می‌توان y وابسته به رسیدن هر عضو به کرنش ϵ_0 را یافت. عضوهای AB و AD در $y = -0/0125l$ مومسان می‌شوند. همچنین، در $y = -0/008l$ ، عضو AC از حالت کشسان خارج می‌گردد. بنابراین، مسیر ایستایی رابطه‌ی (۱۷) تنها تا جابه‌جایی‌های گرهی $x = 0$ و $y = -0/008l$ اعتبار دارد. در این نقطه $f = -258/2952l^3$ می‌باشد. پس از آن، در گام دوم، عضو AC، از رابطه‌ی (۶) بهره‌جویی می‌گردد. این کار، کارمایه‌ی کرنشی گام دوم را به صورت زیر در دسترس قرار می‌دهد:

$$U = \frac{EA_0}{l^3} \times \left[\begin{aligned} &(0.032l + 0.031lk)(x^2y + y^3) + \\ &0.002((x^4 + y^4)(k + 1) - l^3y(k - 1)) + \\ &8 \times 10^{-6}l^4(k - 1) + 0.004x^2y^2(k + 1) + \\ &l^2x^2(0.072 - 2.5 \times 10^{-4}k) + \\ &l^2y^2(0.128 + 0.124k) \end{aligned} \right] \quad (20)$$

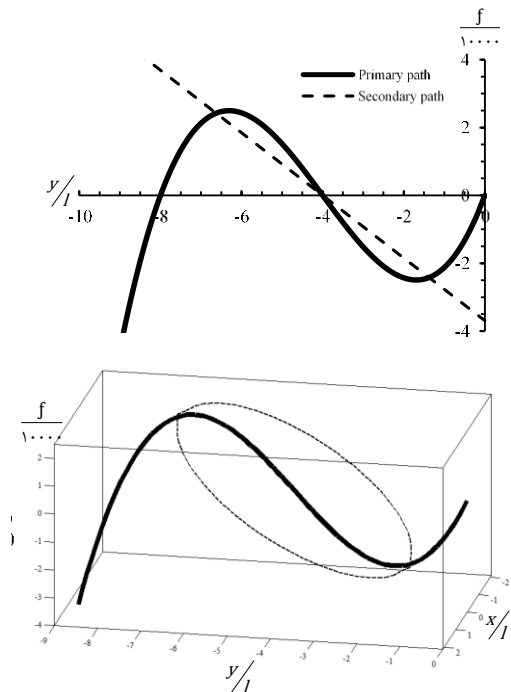
کمینه کردن کارمایه‌ی کل به معادله‌های ایستای همانند

معادله‌های تعادل خرپا پیش از این در رابطه‌های (۹) و (۱۰) آمدند. برای سادگی، عامل f در ادامه تعریف می‌شود. با حل معادله‌های تعادل، مسیر بار-جابه‌جایی خرپا محاسبه می‌گردد. این کار دو پاسخ به صورت رابطه‌های زیر در دسترس قرار می‌دهد. مسیرهای ایستایی خرپای صفحه‌ای سه عضوی را شکل (۴) نشان می‌دهد.

$$f = \frac{64000l^3p}{A_0E} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ f_1 = y(32384l^2 + 12144ly + 1012y^2) \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} x_2 = \pm \frac{\sqrt{253}}{253} \sqrt{-253y^2 - 2304l^2 - 2024yl} \\ f_2 = -36864l^3 - 9216l^2y \end{cases} \quad (18)$$



شکل ۴- مسیرهای ایستایی در گام نخست

برپایه‌ی تقارن هندسه و بارگذاری خرپای صفحه‌ای سه عضوی، مسیر ایستایی نخستین به صورت رابطه‌ی (۱۷) خواهد بود. این پاسخ تا زمانی معتبر است که سازه ناپایدار نشود و رفتار کشسان داشته باشد. با قراردادی $x = 0$ در رابطه‌ی (۱۵)، اندازه‌ی y وابسته به حالت ناپایدار حساب می‌شود. با انجام این کار، پاسخ‌های زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

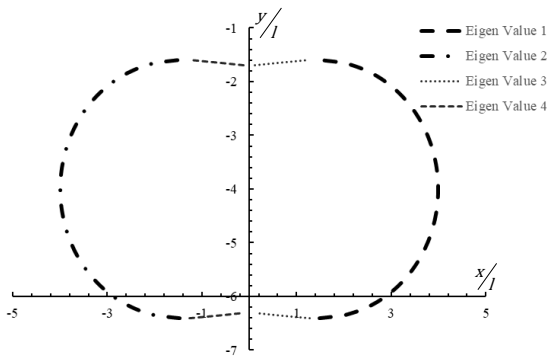
ماتریس سختی مماسی از مشتق دوم کارمایه ی کل نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی حساب می‌شود. این ماتریس در زیر می‌آید. با صفر کردن مقادیرهای ویژه ی ماتریس سختی مماسی، جابه‌جایی گرهی x بر حسب جابه‌جایی گرهی y و طول l در دسترس قرار خواهد گرفت. نمودار وابسته به مقادیرهای ویژه ی برابر با صفر، با فرض $k = 0.02$ ، در شکل (۶) می‌آید.

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{A_0 E}{16000l^3} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = (3x^2 + y^2 + 8yl)(128 + 125k) + 8l^2(289 - k) \quad (25)$$

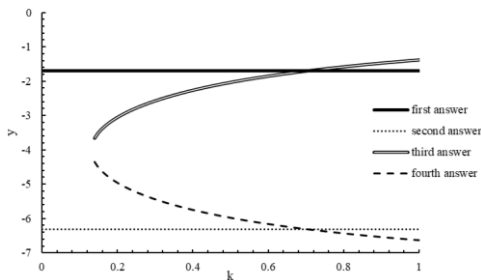
$$k_2 = 2x(y + 4l)(128 + 125k)$$

$$k_3 = (x^2 + 3y^2 + 24yl)(128 + 125k) + 8l^2(513 + 499k)$$



شکل ۶- نمودار وابسته به مقادیرهای ویژه ی برابر صفر در گام دوم

با بهره‌جویی از مسیر ایستایی گام دوم و مقادیرهای ویژه ی ماتریس سختی مماسی، نقطه‌های حدی ناپایداری روی مسیر ایستایی حساب می‌گردد. این کار، چهار پاسخ را بر حسب عامل k در دسترس قرار می‌دهد. شکل (۷) نمودار این پاسخ‌ها برای اندازه‌های مختلف k را آشکار می‌سازد. پاسخ درست از میان این جواب‌ها انتخاب می‌گردد. نمودار پاسخ‌های یکم و سوم در شکل (۷)، به ترتیب، پاسخ درست را برای مقادیرهای $k > 0.7052$ و $k < 0.7052$ نمایش می‌دهند.



شکل ۷- نمودار جابه‌جایی گرهی y وابسته به وضعیت ناپایداری

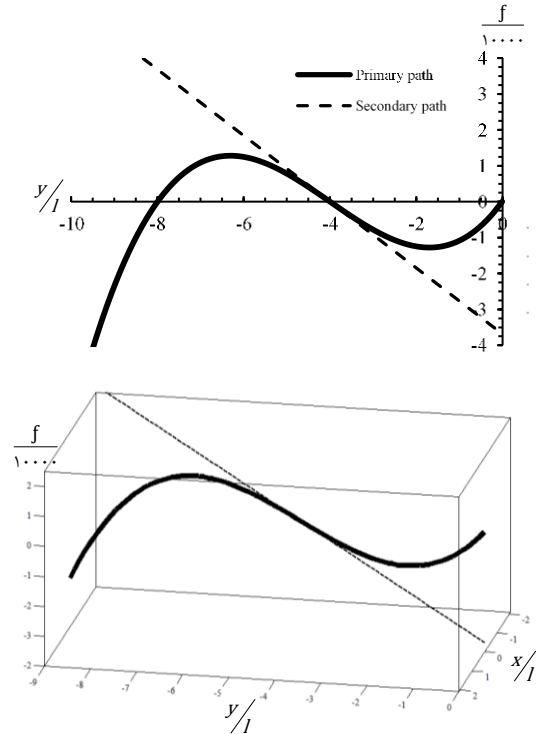
رابطه‌های زیر می‌انجامد. نتیجه‌ها با کمک عامل f ساده شده‌اند. سه پاسخ معادله‌های تعادل در ادامه می‌آیند. از این میان، با توجه به جابه‌جایی گرهی x در آخرین نقطه از مسیر ایستایی نخست، رابطه ی (۲۳) مسیر دوم ایستایی را می‌سازد. از سوی دیگر، پاسخ x در برابری (۲۴) به ازای تمامی اندازه‌های y عددی مختلط خواهد شد. شکل (۵) مسیر ایستایی گام دوم را برای $k = 0.02$ نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{A_0 E}{16000l^3} x \left[\frac{(128 + 125k) \times (x^2 + y^2 + 8yl) + 8l^2(289 - k)}{8l^2(289 - k)} \right] \quad (21)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = 4(y + 4l) \left[\frac{(128 + 125k) \times (x^2 + y^2 + 8yl) + 8l^2(1 - k)}{8l^2(1 - k)} \right] = f \quad (22)$$

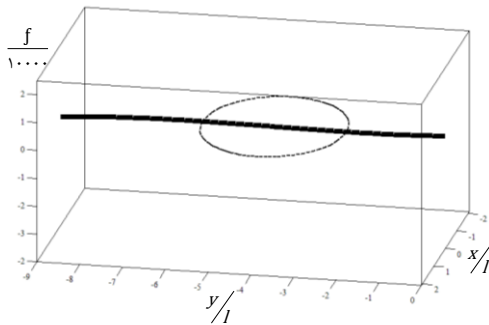
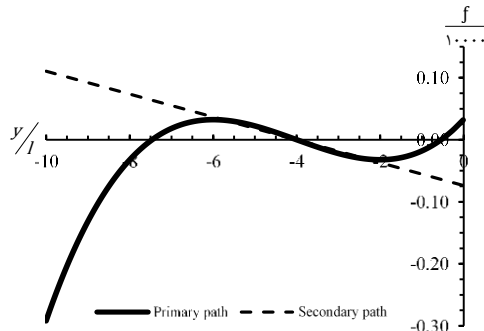
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ f_1 = 4(y + 4l) \left(\frac{y^2(128 + 125k) + 8l^2(1 - k)}{+8yl(128 + 125k)} \right) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\pm 1}{128 + 125k} \sqrt{\frac{-(128 + 125k) \times ((8yl + y^2)(128 + 125k) + 8l^2(289 - k))}{+8(289 - k)l^2}} \\ f_2 = -9216l^2(y + 4l) \end{cases} \quad (24)$$

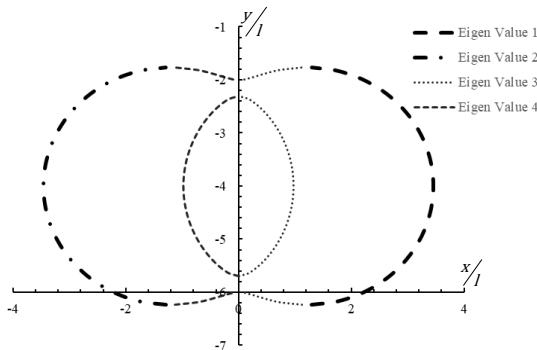


شکل ۵- مسیر ایستایی گام دوم

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\pm 1}{1265k} \sqrt{\frac{-1265 \times (1265(8kyl + ky^2) + 104l^2 + 11416kl^2)}{104l^2 + 11416kl^2}} \\ f_2 = -9216kl^2(y + 4l) \end{cases} \quad (32)$$



شکل ۸- مسیر ایستایی گام سوم



شکل ۹- نمودار وابسته به مقادیر ویژه صفر گام سوم

قراردگی پاسخ درست معادله‌های تعادل در مسیرهای حدی پایداری، چهار پاسخ بر حسب عامل k برای جابه‌جایی‌های گرهی نقطه‌ی ناپایدار در دسترس قرار می‌دهد. شکل (۱۰) نمودار این پاسخ‌ها را برای اندازه‌های مختلف k نشان می‌دهد. پاسخ درست برای مقادیر $k < 0.033943$ و $k > 0.033943$ به ترتیب، در نمودار پاسخ یکم و سوم از شکل (۱۰) آمده است.

برای $k = 0.02$ نقطه‌ی حد پایداری مسیر ایستایی گام دوم به‌صورت رابطه‌ی زیر حساب می‌شود. اینک بایستی کشسان بودن عضوهای AB و AD در این نقطه واکاوی گردد. با داشتن جابه‌جایی‌های گرهی در این نقطه، کرنش عضوهای AB و AD برابر با 0.2712 - به دست می‌آید. به سخن دیگر، در این نقطه تمامی اعضا مومسان شده‌اند. از این‌رو، باید جابه‌جایی وابسته به مرز مومسانی عضوهای AB و AD نیز به دست آید.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1.69494 \\ f = -12786.3904l^3 \end{cases} \quad (26)$$

با قراردگی کرنش عضوهای AB و AD برابر با کرنش جاری شدن فولاد، جابه‌جایی‌های گرهی و نیروی وابسته، به شکل رابطه‌ی زیر حساب خواهد شد. پس از این جابه‌جایی، تمامی عضوهای خرپا مومسان می‌شوند. در گام سوم، کارمایه‌ی کل خرپا برپایه‌ی مومسان شدن تمامی اعضا در دسترس قرار می‌گیرد. کمینه‌سازی این کارمایه، معادله‌های تعادل را نتیجه می‌دهد. معادله‌های تعادل و ماتریس سختی مماسی در حالت مومسان شدن تمامی اعضا در ادامه می‌آیند.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -0.0125l \\ f = -15.95l^3(4.78 + 20.48k) \end{cases} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{A_0 k E}{80000l^3} x (1265k(y^2 + x^2 + 8yl)) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{4}{5} (1265k(4x^2l + x^2y + 12y^2l + y^3) + 416l^3(1 - k) + 8l^2y(5047k + 13)) = f \quad (29)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{A_0 E}{80000l^3} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

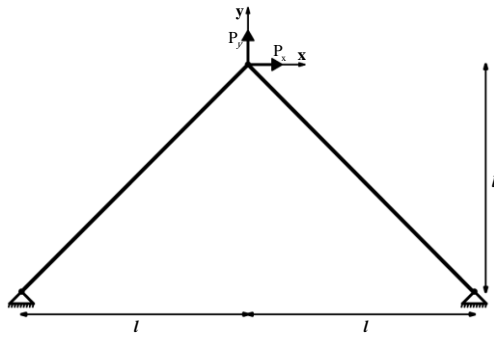
$$k_1 = 1265k(y^2 + 8ly + 3x^2) + 8l^2(1427k + 13)$$

$$k_2 = 2530xk(y + 4l)$$

$$k_3 = 1265k(x^2 + 24ly + 3y^2) + 8l^2(5047k + 13)$$

معادله‌های تعادل دو پاسخ به‌صورت زیر دارند. از این میان، رابطه‌ی (۳۱) پاسخ همخوان با تقارن هندسه، بارگذاری و تغییرشکل سازه می‌باشد. با فرض $k = 0.02$ ، شکل (۸) مسیر ایستایی گام سوم را نشان می‌دهد. همچنین، نمودار وابسته به مقادیر ویژه صفر برای ماتریس سختی مماسی در شکل (۹) می‌آید.

$$\begin{cases} x = 0 \\ f = \frac{4}{5} (8l^2y(5047k + 13) + 1265ky^2(112l + ky) + 416l^3(1 - k)) \end{cases} \quad (31)$$



شکل ۱۱- هندسه و بارگذاری خرپای صفحه‌ای دو عضوی

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{4l^3} A_0 E x (x^2 + 2l^2 + y^2 + 2yl) - p_x = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}}{4l^3} A_0 E (y + l) (x^2 + y^2 + 2yl) - p_y = 0 \end{cases} \quad (36)$$

یافتن مقادیرهای ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی برای واکوی وضعیت ناپایداری خرپا بایسته است. ماتریس سختی مماسی از مشتق‌های دوم کارمایه‌ی کل خرپا نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4l^3} A_0 E \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= (3x^2 + 2l^2 + y^2 + 2yl) \\ k_2 &= 2x(y + l) \\ k_3 &= (3y^2 + 6yl + 2l^2 + x^2) \end{aligned}$$

با بهره‌بردن از عامل f' ، پاسخ‌های معادله‌های تعادل خرپا به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد. نمودار مسیره‌ی ایستایی در شکل (۱۲) می‌آید.

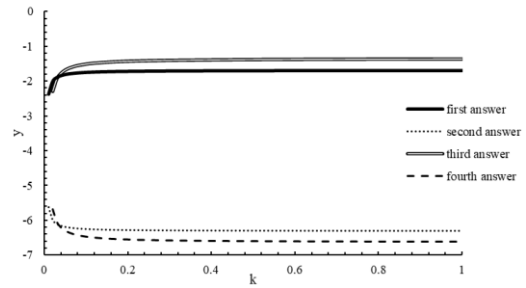
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{60} \left(\sqrt[3]{A+B} - \frac{C}{\sqrt[3]{A+B}} + y + 1 \right) \\ f'_1 = (y+l) \left(\frac{1}{3600} \left(\sqrt[3]{A+B} - \frac{C}{\sqrt[3]{A+B}} \right)^2 + y + l + y(y+2l) \right) \end{cases} \quad (38)$$

$$A = 3603yl^2 + 3601y^2(3l + y) - 3599l^3$$

$$B = 60 \sqrt{482403y^5(y+6l) + 3l^2 \left(\frac{16l(79975l^3 + 319601y^3) + (3831202yl^3 + 5742809y^2l^2)}{+2886414y^4} \right)} \quad (39)$$

$$C = (1199y(y+2l) + 2399l^2)$$

$$f' = \frac{4l^3 p_y}{\sqrt{2} A_0 E} \quad (40)$$



شکل ۱۰- نمودار جابه‌جایی گرهی y وابسته به وضعیت ناپایداری

برای $k = 0.02$ نقطه‌ی حد پایداری مسیر ایستایی گام سوم به صورت زیر حساب می‌شود.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2.0023731l \\ f = -322.68868l^3 \end{cases} \quad (33)$$

با داشتن پاسخ‌های درست در هر گام، می‌توان مسیر ایستایی خرپا را یافت. تابع صریح مسیر ایستایی خرپا به وسیله‌ی رابطه‌های زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned} & \text{for } y \leq -0.0080l \\ & \begin{cases} x_1 = 0 \\ f_1 = y(32384l^2 + 12144ly + 1012y^2) \end{cases} \\ & \text{for } -0.0080l \leq y \leq -0.0125l \\ & \begin{cases} x_2 = 0 \\ f_2 = 4(y+4l) \left(y^2(128 + 125k) + 8yl(128 + 125k) + 8l^2(1-k) \right) \end{cases} \quad (34) \\ & \text{for } -0.0125l \leq y \leq -2.0024l \\ & \begin{cases} x_3 = 0 \\ f_3 = \frac{4}{5}k \left(8l^2y(5047k + 13) + 1265ky^2(12l + ky) + 416l^3(1-k) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

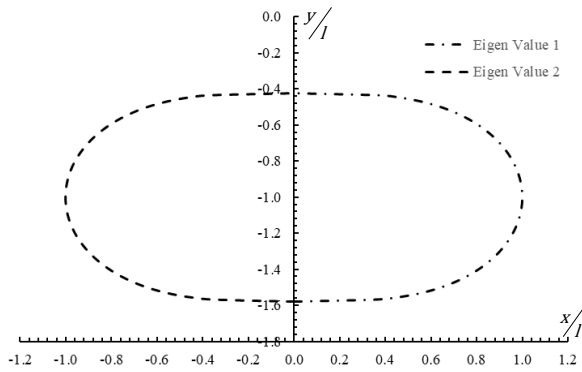
۳-۲- بررسی خرپای صفحه‌ای دو عضوی

شکل (۱۱) خرپای صفحه‌ای با دو عضو را نشان می‌دهد. دستگاه مختصه‌ی XY در گره A بنا می‌گردد. سازه دو درجه آزادی x و y در گره A ، به ترتیب، در راستاهای X و Y دارد. بارهای p_x و p_y ، به ترتیب، در جهت مثبت محورهای x و y به نقطه‌ی A وارد می‌آید. در این مساله فرض می‌شود بار p_x اندازه‌ای برابر با یک-بیستم بار p_y دارد.

بر پایه‌ی پنداشت رفتار کشسان، از روی هم‌گذاری کارمایه‌ی کرنشی عضوهای خرپا و کارمایه‌ی بار بیرونی، کارمایه‌ی کل خرپا به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد. معادله‌های تعادل خرپا نیز از کمینه‌سازی کارمایه‌ی کرنشی نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی x و y ، به دست می‌آیند.

$$U = \frac{\sqrt{2}}{16l^3} A_0 E \left(4l(l+y)(x^2 + y^2) + 2x^2y^2 + x^4 + y^4 \right) \quad (35)$$





شکل ۱۳- نمودار وابسته به مقادیر ویژه صفر در گام نخست

از برابر صفر قرار دادن مقادیر ویژه و ویژه ماتریس سختی مماسی بر روی مسیر ایستایی نخستین، پاسخهای زیر نتیجه می‌شوند. از میان پاسخها، کمترین اندازه‌ی قدرمطلق که در رابطه‌ی (۴۶) می‌آید، جواب درست خواهد بود. در حد پایداری در مسیر ایستایی نخستین، کرنش عضوهای AB و AC خرپا به ترتیب برابر $-0/1923$ و $-0/1747$ می‌باشد. به سخن دیگر، هر دو عضو خرپا در این مقدار کرنش، مومسان شده‌اند.

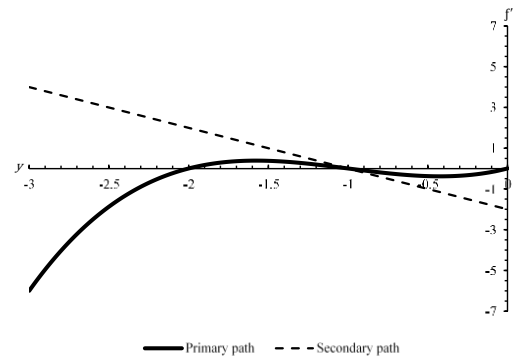
$$\begin{cases} x_1 = -0.014427l \\ y_1 = -0.42265l \\ f'_1 = -0.38478l^3 \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} x_1 = -0.014427l \\ y_1 = -1.57735l \\ f'_1 = -0.38478l^3 \end{cases} \quad (47)$$

اینک اندازه x و y وابسته به ایجاد بیشینه‌ی کرنش کشسان در اعضا حساب می‌گردد. بر روی مسیر ایستایی نخست، در $x = -0.00019l$ ، $y = -0.003813l$ و $f' = -0.00758l^3$ عضو AB خرپا مومسان خواهد شد. پس از آن، کارمایه‌ی کرنشی خرپا به صورت زیر است:

$$U = \sqrt{2}A_0El \begin{pmatrix} \frac{1}{2000l^2}(x^2 + y^2 + 2l(x + y)) \\ + \frac{1}{8l^4}k(x^2 + y^2 + 2l(x + y))^2 \\ + \frac{1}{32l^4}(x^2 + y^2 + 2(y + x))^2 \\ - \frac{1}{5 \times 10^5}(1 + 4k) \end{pmatrix} \quad (48)$$

معادله‌های ایستایی گام دوم از کمینه‌شدن کارمایه‌ی کل نسبت به جابه‌جایی‌های گره‌ی به دست می‌آیند. نمودار مسیرهای ایستایی با فرض $k = 0/02$ در شکل (۱۴) ترسیم می‌شوند. جابه‌جایی‌های گره‌ی خرپا در انتهای گام نخست، پاسخ درست را مشخص می‌سازد.



شکل ۱۲- مسیرهای ایستایی گام نخست

بر پایه‌ی جابه‌جایی خرپا در ابتدای بارگذاری، رابطه‌ی (۳۸) نخستین مسیر ایستایی خرپا را نمایش می‌دهد. مقادیر ویژه و ویژه ماتریس سختی مماسی، حد پایداری خرپا را در مسیر ایستایی نخست مشخص می‌کنند. این مقادیر در رابطه‌های زیر می‌آیند. جابه‌جایی‌های گره‌ی وابسته به مقادیر ویژه صفر نیز در رابطه‌های (۴۴) و (۴۵) در دسترس قرار می‌گیرند. نمودار این مقادیر همانند شکل (۱۳) است.

$$\det(K_T - \omega I) = 0 \quad (49)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{A_0E}{4l^3}\right)(c + d) \\ \omega_2 = \left(\frac{A_0E}{4l^3}\right)(c - d) \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} c &= 2\sqrt{2}(l^2 + 2yl + x^2 + y^2) \\ d &= \sqrt{2\left(\frac{4l^2(x^2 + y^2) + 4yl(x^2 + 4y^2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}\right)} \end{aligned} \quad (43)$$

$$x_1 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6\sqrt{-l^2(2l^2 + 3y^2 + 6ly)}}{-3(2l^2 + 3y^2 + 6ly)}} \quad (44)$$

$$x_2 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{-6\sqrt{-l^2(2l^2 + 3y^2 + 6ly)}}{-3(2l^2 + 3y^2 + 6ly)}} \quad (45)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} A_0 E I \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \left(\frac{1}{250} + k \left(\left(\frac{x}{l} + 1 \right)^2 + \frac{1}{l} (x+y) \right) + \frac{1}{2l^2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{250} \right) + \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2l^2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{l} (y-x) \quad (50)$$

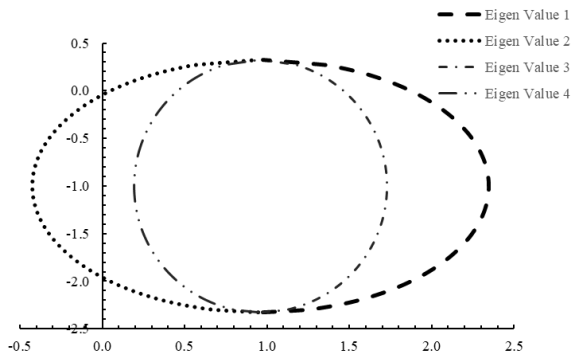
$$k_2 = \left(\frac{y}{l} + 1 \right) \left(k \left(\frac{x}{l} + 1 \right) + \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \right)$$

$$k_3 = \left(\frac{1}{250} + k \left(\left(\frac{y}{l} + 1 \right)^2 + \frac{1}{l} (x+y) \right) + \frac{1}{2l^2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{250} \right) + \left(\frac{y}{l} + 1 \right)^2 + \frac{1}{2l^2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{l} (y-x)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{A_0 E}{8l^3} \right) (c+d) \\ \omega_2 = \left(\frac{A_0 E}{8l^3} \right) (c-d) \end{cases} \quad (51)$$

$$c = 2\sqrt{2} \left(l^2 + kl^2 + 2ly + 2lkx + 2lky \right) \left(-2lx + kx^2 + x^2 + ky^2 + y^2 \right)$$

$$d = \frac{2k^2 \left(4l^4 + 8l^2 \left(\frac{l(x+y)}{(x^2+y^2+xy)} \right) + 4l((x^2+y^2)(x+y)) \right) + 4k \left(-4l^3(l+2y) + 4ly(x^2+y^2) + x^4 + y^4 + 2y^2x^2 \right) + 8l^4 - 16l^2(x^2+y^2+xy) + (8l(x^2+y^2) + 16l^3)(y-x) + (k^2+1)(2x^4+2y^4+4x^2y^2)}{\sqrt{\dots}} \quad (52)$$

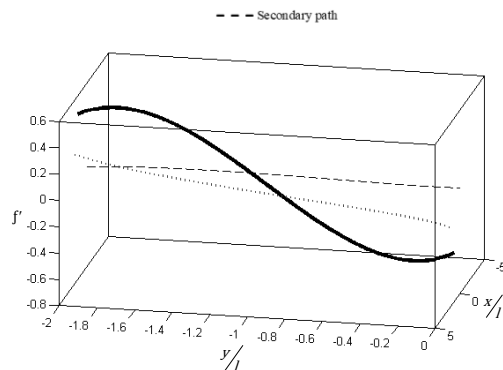
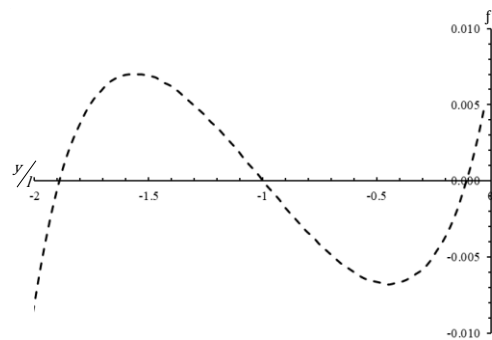
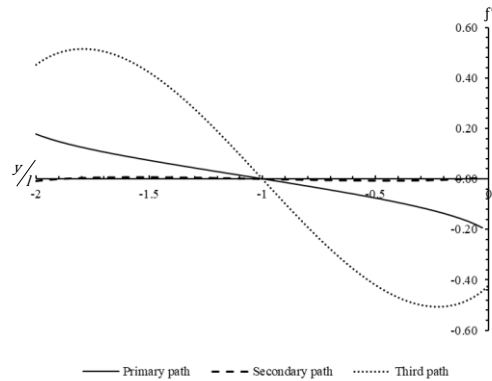


شکل ۱۵- نمودار وابسته به مقادیرهای ویژه‌ی صفر در گام دوم

رابطه‌ی (۵۳) مختصه‌ی اولین نقطه با مقدار ویژه‌ی صفر روی مسیر ایستایی را به عنوان نقطه‌ی حد ناپایداری برای مسیر ایستایی گام دوم نشان می‌دهد.

در حد پایداری در مسیر ایستایی دوم، کرنش عضوهای AB و AC خرپا به ترتیب برابر -0.3788 و -0.0021 می‌باشند. در این نقطه، هر دو عضو خرپا مومسان هستند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0; 4l^2 \left(\frac{1}{1000} (x+l) + \frac{1}{2} k(x+l) \left(\frac{1}{4l^2} ((x+l)^2 + \dots) - \frac{1}{500} \right) + \frac{1}{8l^2} (x-l) \left(\frac{(x-l)^2 + \dots}{(y+l)^2 - 2l^2} \right) \right) = f' \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} = 0; 4l^2 \left(\frac{1}{1000} (y+l) + \frac{1}{2} k(y+l) \left(\frac{1}{4l^2} ((x+l)^2 + \dots) - \frac{1}{500} \right) + \frac{1}{8l^2} (y+l) \left(\frac{(x-l)^2 + \dots}{(y+l)^2 - 2l^2} \right) \right) = f' \end{cases} \quad (49)$$



شکل ۱۴- مسیرهای ایستایی گام دوم

مشتق دوم کارمایه‌ی کل نسبت به جابه‌جایی‌های گره‌ی، ماتریس سختی مماسی را در اختیار قرار می‌دهد. رابطه (۵۱) مقادیرهای ویژه ماتریس سختی مماسی را نشان می‌دهند. نمودار وابسته به صفر شدن مقادیرهای ویژه در شکل (۱۵) می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0; \frac{4}{25}x(l^2(1+249k) + 125k(x^2+y^2+2ly)) = f' \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} = 0; \frac{1}{125}(y+l)(l^2(1-k) + 125k(x^2+y^2+2ly)) = f' \end{cases} \quad (56)$$

ماتریس سختی مماسی از مشتق دوم کارمایه‌ی کل نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی در اختیار قرار می‌گیرد. رابطه (57) این ماتریس را نمایش می‌دهد. همچنین، مقدارهای ویژه ماتریس سختی مماسی در رابطه (58) آمده است. نمودار وابسته به صفر شدن مقدارهای ویژه در شکل (17) می‌آید.

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{500l^3} A_0 E \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$k_1 = l^2(1+249k) + 125k(y^2+2ly+3x^2)$$

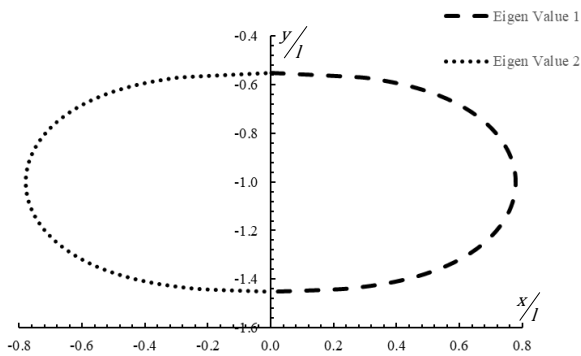
$$k_2 = 250k(y+l)x$$

$$k_3 = l^2(1+249k) + 125k(x^2+3y^2+6ly)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{\sqrt{2}A_0E}{500l^3}\right)(c+125d) \\ \omega_2 = \left(\frac{\sqrt{2}A_0E}{500l^3}\right)(c-125d) \end{cases} \quad (58)$$

$$c = l^2(1+249k) + 250k(2ly+x^2+y^2)$$

$$d = \sqrt{k^2(x^4+y^4+2x^2y^2+4l(l+y)(x^2+y^2))} \quad (59)$$



شکل ۱۷- نمودار وابسته به مقدارهای ویژه صفر در گام سوم

رابطه‌ی (60) مختصه‌ی اولین نقطه با مقدار ویژه صفر روی مسیر ایستایی را نشان می‌دهد. این جواب، نقطه‌ی حد ناپایداری برای مسیر ایستایی گام سوم را نشان می‌دهد.

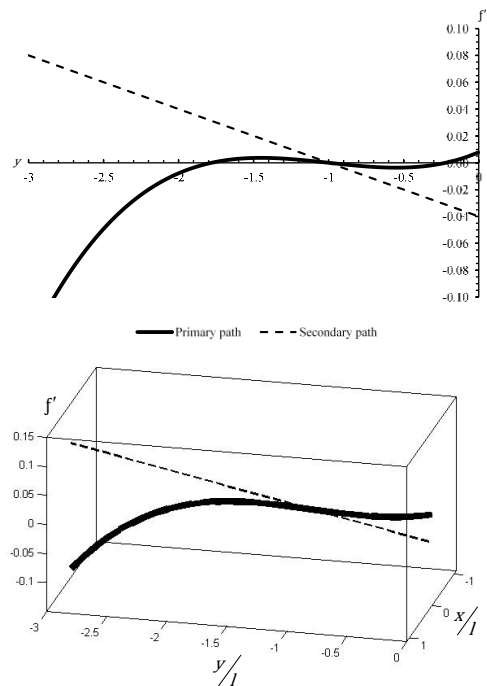
$$\begin{cases} x = -0.00572086l \\ y = -0.5498208l \\ f' = -0.00364921l^3 \end{cases} \quad (60)$$

$$\begin{cases} x = -0.2987215l \\ y = -0.447657l \\ f' = -l^4 \left(\frac{0.0661243l^3 - 0.221066l^2}{+0.1656179l - 0.00392} \right) \end{cases} \quad (53)$$

اینک اندازه x و y وابسته به ایجاد بیشینه‌ی کرنش کشسان در عضو AC حساب می‌گردد. بر روی مسیر ایستایی دوم، در مختصات آمده در معادله (54) عضو AC خرپا نیز مومسان خواهد شد.

$$\begin{cases} x; -0.2889255l \\ y; -0.424953l \\ f'; - \left(\frac{0.0572293l^3 - 0.1985447l^2}{+0.151971l - 0.00392} \right) l^4 \end{cases} \quad (54)$$

پس از آن، برای گام آخر کارمایه‌ی کرنشی خرپا به صورت زیر بدست می‌آید. در ادامه، از کمینه‌شدن کارمایه‌ی کل نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، معادله‌های ایستایی گام سوم به دست می‌آیند. نمودار این پاسخ‌ها با فرض $k=0.2$ در شکل (16) ترسیم می‌شوند. با توجه به جابه‌جایی گره خرپا در انتهای گام دوم، مسیر ایستایی درست گام سوم مشخص می‌شود. این مسیر ایستایی تا زمان پایداری خرپا معتبر خواهد بود.

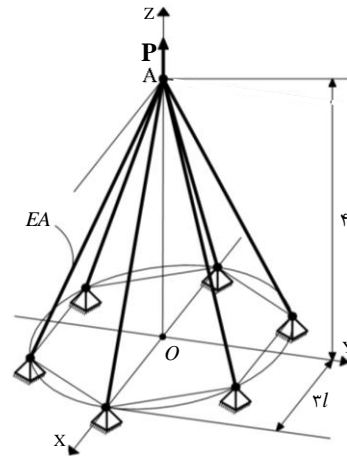


شکل ۱۶- مسیرهای ایستایی گام سوم

$$U = \frac{\sqrt{2}A_0E}{500l^2} \times \left(k \left(\frac{15625(x^4+y^4+2y^2x^2)}{+250l(250y+249l)(x^2+y^2)} \right) + \left(\frac{+l^2(l-500y)}{2l^2(125x^2+125y^2+250yl-l^2)} \right) + l^4 \right) \quad (55)$$

۳-۳- واکوی خریای هرمی

شکل (۱۸) خریای سه‌بعدی متقارن با n عضو را نشان می‌دهد. برای بررسی این خریا دستگاه مختصه قطبی در نقطه‌ی O بنا می‌گردد. این سازه سه درجه‌ی آزادی r ، θ و z در گره A دارد. جابه‌جایی z در راستای مثبت محور Z پنداشته می‌شود. بزرگی بار وارد به خریا در نقطه‌ی A و در جهت مثبت محور Z برابر p می‌باشد.



شکل ۱۸- هندسه و بارگذاری خریای هرمی

$$L_i^2 = (x - x_i)^T (x - x_i) \quad (64)$$

$$= r^2 - 6rl \cos(\theta - \theta_i) + 9l^2 + z^2$$

$$U(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{2} EA_0 L_0 \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i^2 \quad (65)$$

$$= \frac{nEA_0}{8L_0^3} ((r^2 + z^2 - 16l^2)^2 + 18l^2 r^2)$$

$$= U(r, z)$$

از جمع کارمایه‌ی کرنشی با کارمایه‌ی بار خارجی، تابع کارمایه‌ی نهفته‌ی کل به دست می‌آید. با کمینه‌سازی این تابع نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، معادله‌های مسیر ایستایی به صورت زیر مشخص می‌شوند. صفر شدن این رابطه‌ها معادله‌های ایستایی را با رفتار کشسان در دسترس قرار می‌دهد. افزون بر این، با هدف شناسایی مرز ناپایداری، ماتریس سختی مماسی حساب می‌شود. مشتق‌های دوم کارمایه‌ی کل خریا نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، ماتریس سختی مماسی را به شکل برابری زیر نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{nEA_0}{2L_0^3} r(r^2 + z^2 - 7l^2) - pq_r \cos(\theta - \theta_p) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial y} = pq_r \sin(\theta - \theta_p) \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{nEA_0}{2L_0^3} z(r^2 + z^2 - 16l^2) - pq_z \end{cases} \quad (66)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{rr} & \pi_{r\theta} & \pi_{rz} \\ \pi_{\theta r} & \pi_{\theta\theta} & \pi_{\theta z} \\ \pi_{zr} & \pi_{z\theta} & \pi_{zz} \end{bmatrix} = \frac{nEA_0}{2L_0^3} \times \begin{bmatrix} 3r^2 + z^2 - 7l^2 & 0 & 2rz \\ 0 & r^2 + z^2 - 7l^2 & 0 \\ 2rz & 0 & r^2 + 3z^2 - 16l^2 \end{bmatrix} \quad (67)$$

برابری کنونی مقادیر ویژه و ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی را ارائه می‌نماید. صفر نمودن مقادیر ویژه و ویژه، رابطه‌هایی میان جابه‌جایی‌های گرهی وابسته به وضعیت ناپایداری خریا را به دست می‌دهد. شکل (۱۹) نمودار وابسته به این جابه‌جایی‌ها را به نمایش می‌گذارد.

$$\det(K_T - \omega I) = 0 \quad (68)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{nEA_0}{2L_0^3} \left[2r^2 + 2z^2 - \frac{23}{2}l^2 - \sqrt{\left(r^2 - z^2 + \frac{9}{2}l^2\right)^2 + 4r^2z^2} \right] \\ \omega_2 = \frac{nEA_0}{2L_0^3} (r^2 + z^2 - 7l^2) \\ \omega_3 = \frac{nEA_0}{2L_0^3} \left[2r^2 + 2z^2 - \frac{23}{2}l^2 - \sqrt{\left(r^2 - z^2 + \frac{9}{2}l^2\right)^2 + 4r^2z^2} \right] \end{cases} \quad (69)$$

مختصه‌ی گره‌های خریا پیش و پس از بارگذاری و در حالت کلی، در رابطه‌های زیر می‌آیند. θ و z ، r و θ موقعیت نقطه‌ی A را پس از جابه‌جایی نشان می‌دهد. X_A و x_A به ترتیب، مختصه‌های گره A پیش و پس از بارگذاری می‌باشند. همچنین، مختصه‌های گرهی سایر گره‌ها قبل و بعد از وارد آمدن بار، به ترتیب، با X_i و x_i تعریف می‌گردند.

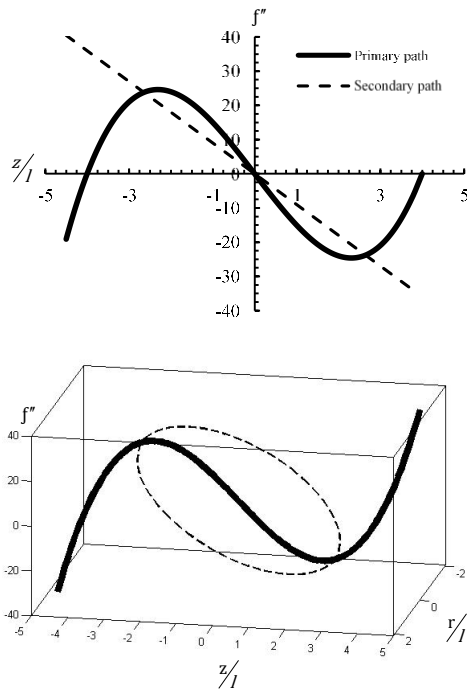
$$\begin{cases} X_A = [X, Y, Z]^T = [0, 0, 4l]^T \\ X_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T = [3l \cos(\theta_i), 3l \sin(\theta_i), 0]^T \end{cases} \quad (70)$$

$$\begin{cases} X_A = [X, Y, Z]^T = [r \cos(\theta), r \sin(\theta), z] \\ X_i = X_i \end{cases} \quad (71)$$

$$\theta_i = 2\pi \frac{i-1}{n} \quad (72)$$

با توجه به مختصه‌ی گره‌های عضوها پیش و پس از بارگذاری، رابطه‌ی (۶۴) مربع طول نهایی هر عضو را در دسترس قرار می‌دهد. با محاسبه‌ی طول هر عضو پس از تغییرشکل و بهره‌جویی از کرنش گرین، کارمایه‌ی کرنشی هر جزء حساب می‌گردد. کارمایه‌ی کرنشی کل خریا، از مجموع کارمایه‌ی کرنشی عضوهای خریا، به صورت برابری (۶۵) در دسترس قرار می‌گیرد.

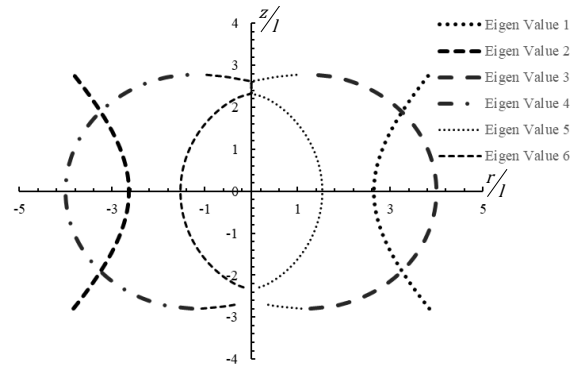




شکل ۲۰- مسیرهای ایستایی در گام نخست

برپایه‌ی دستگاه مختصه، پاسخ z با بیشترین اندازه‌ی مثبت، نقطه‌ی ناپایداری را نشان می‌دهد. بنابراین، هنگام ناپایداری خرپا در روی مسیر ایستایی نخستین، نقطه‌ی A دارای مقدار $z = \sqrt{7}l$ خواهد بود. در ادامه، قرارگیری سازه در بازه‌ی رفتاری کشسان واکاوی می‌گردد. از آنجا که بار قائم وارده بر روی محور تقارن هندسی خرپا قرار دارد، کرنش تمام عضوهای سازه با یکدیگر برابر خواهد بود. درحالت ناپایداری، نقطه‌ی A مختصه‌های $r = 0$ و $z = \sqrt{7}l$ دارد. در این وضعیت، کرنش در هر یک از عضوهای خرپا برابر با $0/2$ خواهد بود. بر پایه‌ی نمودار دوخطی تنش-کرنش ماده، بیشینه‌ی کرنش در رفتار کشسان برابر با $0/002$ فرض گردید. از این رو، تمامی عضوهای خرپا در نخستین نقطه‌ی ناپایداری مومسان شده‌اند. اینک، باید جابه‌جایی‌های گره‌ی هنگام ورود به ناحیه‌ی مومسان در مسیر ایستایی نخستین حساب گردند. چون جابه‌جایی گره‌ی r در مسیر ایستایی اولیه مقدار صفر دارد، به‌آسانی می‌توان اندازه‌ی z وابسته به آفرینش کرنش ϵ_0 در هر یک از اعضا را به‌دست آورد. تمامی عضوهای خرپا در $r = 0$ و $z = 3.9875l$ مومسان می‌شوند. بنابراین، مسیر ایستایی نخستین تا این نقطه اعتبار خواهد داشت. در این نقطه $f'' = -0.39835l^3$ می‌باشد. در گام دوم تمامی اعضا مومسان می‌شوند. برای نوشتن کارمایه‌ی کرنشی گام دوم از رابطه‌ی (۶) بهره‌جویی می‌گردد. در این گام، کارمایه‌ی کرنشی خرپا به‌صورت زیر در اختیار قرار

$$\begin{cases} Z_{cr1} = \pm \sqrt{\frac{37l^2}{6} - r^2 + \sqrt{\frac{25l^4}{36} + 6l^2r^2}} \\ Z_{cr2} = \pm \sqrt{7l^2 - r^2} \\ Z_{cr3} = \pm \sqrt{\frac{37l^2}{6} - r^2 - \sqrt{\frac{25l^4}{36} + 6l^2r^2}} \end{cases} \quad (70)$$



شکل ۱۹- نمودار وابسته به مقدارهای ویژه‌ی صفر در گام نخست

حل معادله‌های تعادل خرپا، مسیر ایستایی را در دسترس قرار می‌دهد. از عامل f'' برای ساده‌سازی بهره‌جویی می‌گردد. معادله‌های ایستایی، پاسخ‌های زیر را دارند. شکل (۲۰) این مسیرهای ایستایی را نشان می‌دهد.

$$f'' = \frac{2L_0^3 p}{nEA_0} \quad (71)$$

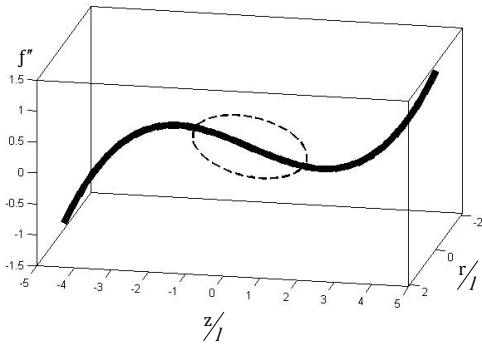
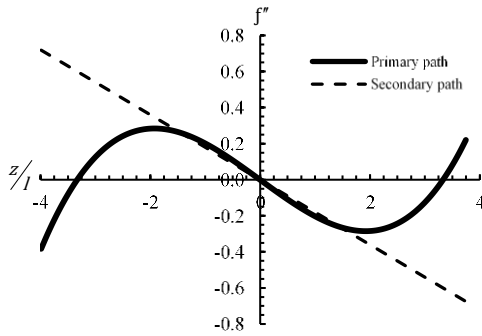
$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ f_1'' = z(z^2 - 16l^2) \end{cases} \quad (72)$$

$$\begin{cases} r_2 = \pm \sqrt{7l^2 - z^2} \\ f_2'' = -9zl^2 \end{cases} \quad (73)$$

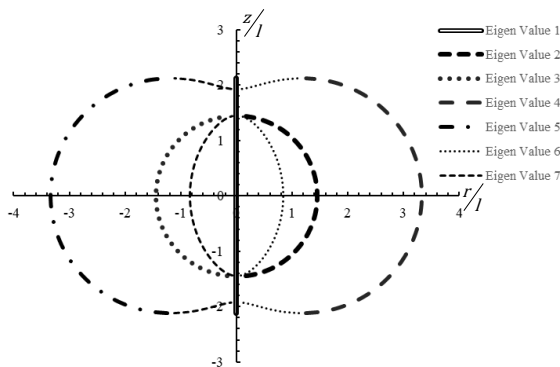
برپایه‌ی تقارن هندسه و بارگذاری خرپا، مسیر ایستایی گام نخست، اگر همه‌ی اعضا کشسان باشند، به صورت رابطه‌ی (۷۲) خواهد بود. این پاسخ تا هنگامی اعتبار دارد که افزون بر پایداری، هیچ‌یک از اعضا از رفتار کشسان خارج نشوند. اندازه‌ی z وابسته به شرایط ناپایداری خرپا، از جای‌گذاری $r = 0$ در رابطه‌ی (۷۰) به‌دست می‌آید. برابری‌های زیر این پاسخ‌ها را نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ z_1 = \pm \sqrt{7}l \\ f_1'' = z(z^2 - 9l^2) \\ r_2 = 0 \\ z_2 = \pm \frac{4}{3}\sqrt{3}l \\ f_2'' = z\left(z^2 - \frac{32}{3}l^2\right) \end{cases} \quad (74)$$

می‌گیرد:



شکل ۲۱- مسیرهای ایستایی در گام دوم



شکل ۲۲- نمودار وابسته به مقادیرهای ویژه صفر در گام دوم

با برابر صفر قرار دادن مقادیرهای ویژه ماتریس سختی مماسی و بهره‌جویی از تابع مسیر ایستایی گام دوم، جابه‌جایی گرهی z وابسته به حالت ناپایداری خرپا به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد. نمودار این پنج پاسخ برحسب عامل k در شکل (۲۳) می‌آید. پاسخ درست از میان این جواب‌ها انتخاب می‌گردد. در این مسئله، پاسخ درست برای هر اندازه‌ی عامل k ، بزرگترین عدد مثبت در بین جواب‌ها می‌باشد. بر این پایه، برای اندازه‌های $0.02 < k < 0.38461$ و $0.38461 < k > 0.38461$ ، به ترتیب، پاسخ درست طبق برابری‌های (۸۴)، (۸۰) و (۸۲) حساب می‌شود.

$$U(r, \theta, z) = \frac{nEA_0}{1000L_0^3} \times \left[\frac{125k}{L_0^2} (r^2 + z^2 - 16l^2)^2 + \frac{18l^2 r^2}{L_0^2} \right] + (1-k) \left(r^2 + z^2 - \frac{L_0^2}{500} \right) = U(r, z) \quad (75)$$

معادله‌های ایستایی از کمینه کردن کارمایه‌ی کل نتیجه می‌شوند. پاسخ‌های معادله‌های تعادل به صورت زیر هستند. با توجه به تقارن سازه و نمودار بار-جابه‌جایی گام نخست، رابطه‌ی (۷۷) مسیر ایستایی خرپا برای گام دوم را در دسترس قرار می‌دهد. این مسیر نیز تا حد پایداری خرپا معتبر خواهد بود. شکل (۲۱) این مسیرهای ایستایی خرپا را در گام دوم و با فرض $k = 0.02$ نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial \pi}{\partial r} = -\frac{nEA_0}{500L_0^3} r (L_0^2(k-1) - 250k(r^2 + z^2 - 7l^2)) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \theta} = 0 \quad (76)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = -\frac{z}{250} (L_0^2(k-1) - 250k(r^2 + z^2 - 16l^2)) = f''$$

$$r = 0$$

$$f'' = -\frac{z}{250} (L_0^2(k-1) + 250k(16l^2 - z^2)) \quad (77)$$

$$r = \pm \frac{1}{50k} \sqrt{10k(L_0^2(k-1) - 250k(z^2 - 7l^2))}$$

$$f'' = -9zkl^2 \quad (78)$$

ماتریس سختی مماسی از مشتق دوم کارمایه‌ی نهفته‌ی کل نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، به دست می‌آید. می‌توان این ماتریس را به سیمای زیر نمایش داد. از صفر شدن مقادیرهای ویژه‌ی ماتریس سختی هندسی برای بررسی پایداری بهره می‌برند. شکل (۲۲) مکان هندسی نقطه‌های با مقدار ویژه صفر را نشان می‌دهد.

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{rrr} & \pi_{r\theta} & \pi_{rz} \\ \pi_{\theta r} & \pi_{\theta\theta} & \pi_{\theta z} \\ \pi_{zr} & \pi_{z\theta} & \pi_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{nEA_0}{500L_0^3} \times \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_3 & 0 \\ k_2 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$k_1 = L_0^2(k-1) - 250k(3r^2 + z^2 + 7l^2)$$

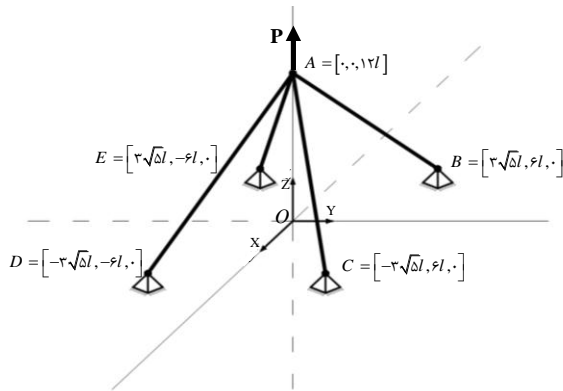
$$k_2 = -500kzr$$

$$k_3 = r(L_0^2(k-1) - 250k(r^2 + z^2 + 7l^2))$$

$$k_4 = L_0^2(k-1) - 250k(r^2 + 3z^2 - 16l^2)$$

۳-۴- واکاوی خرابی فضایی چهار عضوی

شکل (۲۴) خرابی سه بعدی با چهار عضو را در دستگاه مختصی دکارتی XYZ نشان می‌دهد. این دستگاه مختصه بر روی نقطه O بنا می‌شود. این سازه سه درجه آزادی x، y و z در نقطه A دارد. بزرگی بار وارد به خرپا در نقطه A و در جهت مثبت محور Z برابر با p می‌باشد.



شکل ۲۴- هندسه و بارگذاری خرابی سه بعدی چهار عضوی

نخست، طول نهایی هر عضو خرپا پس از جابه‌جایی‌های گرهی نقطه A، حساب می‌شود. کارمایه‌ی نهفته‌ی کل خرپا از جمع کارمایه‌ی کرنشی عضوهای خرپا و کارمایه‌ی بار خارجی به دست می‌آید. کارمایه‌ی کرنشی کل خرپا در حالت رفتار کشسان به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد. مسیر ایستایی برای رفتار کشسان از کمینه‌سازی کارمایه‌ی کل خرپا نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی به دست می‌آید. معادله‌های تعادل به شکل زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

$$U = \frac{EA_0}{6750l^3} \times \left(x^4 + y^4 + z^4 - 36l^2(3y^2 + 4x^2 + 8z^2 - 576l^2) + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \right) \quad (۸۷)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{2EA_0}{3375l^3} x(x^2 + y^2 + z^2 - 72l^2) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{2EA_0}{3375l^3} y(x^2 + y^2 + z^2 - 54l^2) = 0 \quad (۸۸)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = \frac{2EA_0}{3375l^3} z(x^2 + y^2 + z^2 - 144l^2) - p = 0$$

برای شناسایی وضعیت ناپایداری خرپا، باید مقادیرهای ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی را یافت. این ماتریس از مشتق‌های دوم کارمایه‌ی کل خرپا نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی به دست می‌آید. ماتریس سختی مماسی سیمای زیر را دارد:

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = \frac{1}{150k} \sqrt{30k(4000kl^2 + L_0^2(k-1))} \\ f'' = -\frac{z}{375} (4000kl^2 + L_0^2(k-1)) \end{cases} \quad (۸۰)$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = -\frac{1}{150k} \sqrt{30k(4000kl^2 + L_0^2(k-1))} \\ f'' = -\frac{z}{375} (4000kl^2 + L_0^2(k-1)) \end{cases} \quad (۸۱)$$

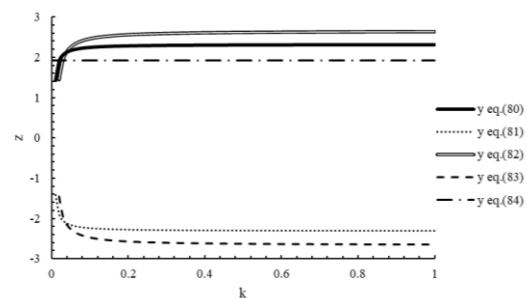
$$\begin{cases} r = 0 \\ z = \frac{1}{50k} \sqrt{10k(250k(7l^2) + L_0^2(k-1))} \\ f'' = -9zk l^2 \end{cases} \quad (۸۲)$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = -\frac{1}{50k} \sqrt{10k(250k(7l^2) + L_0^2(k-1))} \\ f'' = -9zk l^2 \end{cases} \quad (۸۳)$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = \frac{1}{10} \sqrt{370} l \\ f'' = -\frac{37z}{250} l^2 \end{cases} \quad (۸۴)$$

برای $k = 0.02$ نقطه‌ی حد پایداری مسیر ایستایی در گام دوم به صورت زیر حساب می‌شود.

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = \frac{1}{10} \sqrt{370} l \\ f'' = -\frac{37z}{250} l^2 \end{cases} \quad (۸۵)$$



شکل ۲۳- نمودار جابه‌جایی گرهی z وابسته به وضعیت ناپایداری

تابع صریح مسیر ایستایی خرابی هر می در هنگام ناپایداری خرپا در رفتار مومسان سیمای زیر را دارد:

$$\begin{aligned} & \text{for } 3.9875l \leq z \\ & \begin{cases} r_1 = 0 \\ f_1'' = z(z^2 - 16l^2) \end{cases} \\ & \text{for } 1.92354l \leq z \leq 3.9875l \\ & \begin{cases} r_2 = 0 \\ f_2'' = -\frac{z}{250} (L_0^2(k-1) + 250k(16l^2 - z^2)) \end{cases} \end{aligned} \quad (۸۶)$$

قرار دادن مقدارهای ویژه ماتریس سختی مماسی، پاسخ‌های زیر برای حد پایداری خرپا به دست می‌آید. از این میان، جواب با بیشترین اندازه‌ی مثبت، درست خواهد بود. رابطه‌ی (۹۵) حد پایداری مسیر ایستایی گام نخست را نشان می‌دهد. در این نقطه از مسیر ایستایی، کرنش هر یک از عضوهای خرپا برابر 0.175379 خواهد بود. بنابراین، تمامی عضوهای خرپا در این لحظه مومسان خواهند شد.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = \pm 6\sqrt{2}l \\ f_1''' = \pm 432\sqrt{2} \end{cases} \quad (94)$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = \pm 3\sqrt{6}l \\ f_2''' = \pm 270\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0 \\ z_3 = \pm 3\sqrt{3}l \\ f_3''' = \pm 384\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 6\sqrt{2}l \\ f''' = -432\sqrt{2} \end{cases} \quad (95)$$

برپایه‌ی تقارن، جابه‌جایی‌های گره‌ی x و y روی مسیر ایستایی برابر صفر می‌باشند. با تغییر جابه‌جایی z ، تمامی عضوهای خرپا در $x=0$ و $y=0$ و $z = (0.03l)(159.001)^{1/2} (11/96248l)$ از ناحیه‌ی کشسان خارج می‌گردند. بنابراین خرپا پیش از ناپایدار شدن، وارد ناحیه‌ی مومسان می‌شود. از این رو، مسیر ایستایی در گام نخست تنها تا جابه‌جایی گره‌ی $z = (0.03l)(159.001)^{1/2}$ اعتبار دارد. در این نقطه، مقدار $f''' = 1075546l^3$ را دارد. در ادامه، برای یافتن مسیر ایستایی در گام دوم، از رابطه‌ی (۶) برای محاسبه‌ی کارمایه‌ی کرنشی بهره‌جویی می‌گردد. برابری زیر، کارمایه‌ی کرنشی خرپا در گام دوم را در دسترس قرار می‌دهد. در این گام تمامی اعضوها باهم مومسان می‌شوند. معادله‌های تعادل گام دوم از کمینه‌شدن کارمایه‌ی کل به دست می‌آیند:

$$U = \frac{EA_0}{375l} \times \left(\frac{1}{10} (x^2 + y^2 + z^2 - k(61y^2 + 81x^2 + 161z^2))^2 + \frac{45}{1000} l^2 (25921k - 321) + \frac{1}{18l^2} k (2(y^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2) + (x^4 + y^4 + z^4)) \right) \quad (96)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{bmatrix} = \frac{2EA_0}{3375l^3} \times \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 3x^2 + y^2 + z^2 - 72l^2 \quad (97)$$

$$k_2 = 2xy$$

$$k_3 = 2xz$$

$$k_4 = x^2 + 3y^2 + z^2 - 54l^2$$

$$k_5 = 2yz$$

$$k_6 = x^2 + y^2 + 3z^2 - 144l^2$$

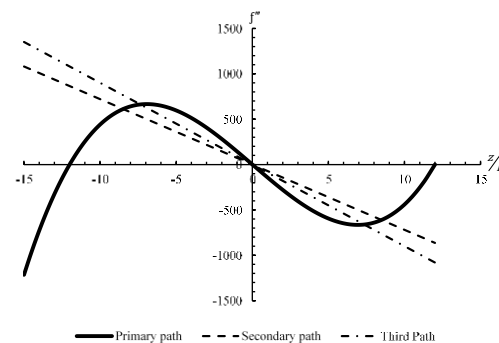
مسیر ایستایی خرپا از حل معادله‌های تعادل حساب می‌گردد. برای ساده‌سازی از عامل f''' بهره‌جویی می‌شود. پاسخ‌های معادله‌های تعادل در رابطه‌های زیر می‌آیند. نمودار مسیرهای ایستایی در شکل (۲۵) نشان داده شده‌اند. بر پایه‌ی تقارن هندسه و بارگذاری، مسیر ایستایی نخستین خرپا به صورت رابطه‌ی (۹۱) خواهد بود. این مسیر برای خرابی پایدار با رفتار کشسان معتبر است.

$$f''' = \frac{3375p}{2EA_0} \quad (90)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ f_1''' = z(z^2 - 144l^2)/l^3 \end{cases} \quad (91)$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \pm \sqrt{-z^2 + 54l^2} \\ f_2''' = -90z/l \end{cases} \quad (92)$$

$$\begin{cases} x_3 = \pm \sqrt{-z^2 - y^2 + 72l^2} \\ y_3 = 0 \\ f_3''' = -72z/l \end{cases} \quad (93)$$



شکل ۲۵- مسیرهای ایستایی گام نخست

بر روی مسیر ایستایی اندازه‌ی جابه‌جایی‌های گره‌ی x و y برابر با صفر می‌باشند. با فرض $x=0$ و $y=0$ ، از برابر صفر

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EA_0}{16875l^3} \times \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 10(ky^2 + 3kx^2 + kz^2) + 9l^2(1 - 81k) \quad (1.00)$$

$$k_2 = 20kxy$$

$$k_3 = 20kxz$$

$$k_4 = 10(3ky^2 + kx^2 + kz^2) + 9l^2(1 - 61k)$$

$$k_5 = 20kyz$$

$$k_6 = 10(kx^2 + ky^2 + 3kz^2) + 9l^2(1 - 161k)$$

در نقطه‌ی حد پایداری، مقدارهای ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی برابر با صفر می‌گردد. از برابر صفر قرار دادن مقدارهای ویژه‌ی ماتریس سختی هندسی و بهره‌بردن از مسیر ایستایی گام دوم، نقطه‌ی حد پایداری حساب می‌شود. رابطه‌های زیر پاسخ‌های وابسته به صفر شدن مقدارهای ویژه‌ی ماتریس سختی مماسی را بر روی مسیر ایستایی گام دوم نشان می‌دهند. این نتیجه‌ها وابسته به اندازه‌ی k خواهند بود. برای هر اندازه‌ی k ، پاسخ درست، بزرگترین عدد مثبت در بین جواب‌هاست. شکل (۲۷)، نمودار این پاسخ‌ها را بر حسب k نشان می‌دهد. همانگونه که در این نمودار مشخص است، پاسخ درست برای مقدارهای $k > 0.02439$ به صورت برابری (۱.۰۳) و برای $k < 0.02439$ به صورت رابطه‌ی (۱.۰۵) تعریف خواهد شد.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{10k} l \sqrt{10k(61k - 1)} \\ f''' = -27\sqrt{10k(61k - 1)} \end{cases} \quad (1.01)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{3}{10k} l \sqrt{10k(61k - 1)} \\ f''' = 27\sqrt{10k(61k - 1)} \end{cases} \quad (1.02)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{10k} l \sqrt{10k(81k - 1)} \\ f''' = -\frac{216}{10} \sqrt{10k(81k - 1)} \end{cases} \quad (1.03)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{3}{10k} l \sqrt{10k(81k - 1)} \\ f''' = \frac{216}{10} \sqrt{10k(81k - 1)} \end{cases} \quad (1.04)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{EA_0}{16875l^3} x (9l^2(1 - 81k) + 10k(x^2 + y^2 + z^2)) = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{EA_0}{16875l^3} y (9l^2(1 - 61k) + 10k(x^2 + y^2 + z^2)) = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} = \frac{1}{10l^3} z (9l^2(1 - 161k) + 10k(x^2 + y^2 + z^2)) = f''' \end{cases} \quad (97)$$

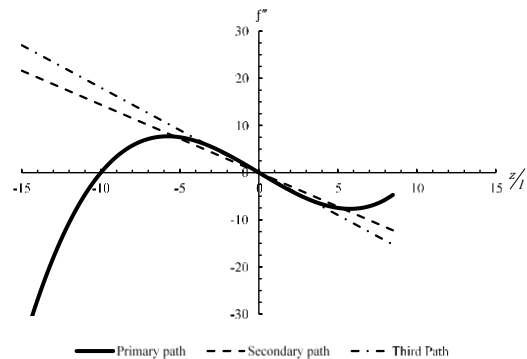
شش پاسخ معادله‌های تعادل در زیر می‌آیند. بر پایه‌ی تقارن هندسه و بارگذاری خریا، پاسخ درست به صورت برابری (۹۹) خواهد بود. این مسیر ایستایی تا هنگامی که خریا پایدار باشد اعتبار دارد. مسیر ایستایی خریا در گام دوم با فرض $k = 0.02$ در شکل (۲۶) آمده است.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ f_1''' = \frac{1}{10l^3} z (9l^2 + 10kz^2 - 1449kl^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \pm \frac{1}{10k} \times \sqrt{10k(-10kz^2 - 10ky^2 - 9l^2 + 729kl^2)} \\ y_2 = 0 \\ f_2''' = -\frac{72kz}{l} \end{cases} \quad (98)$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = \pm \frac{1}{10k} \sqrt{-10k(-549kl^2 + 10kz^2 + 9l^2)} \\ f_3''' = -\frac{90kz}{l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ f''' = \frac{1}{10} z (10kz^2 + 9l^2(1 - 161k)) \end{cases} \quad (99)$$



شکل ۲۶- مسیرهای ایستایی گام دوم

ماتریس سختی مماسی با گرفتن مشتق دوم کارمایه‌ی کل نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی، به صورت زیر به دست می‌آید:

۵- نتیجه‌گیری

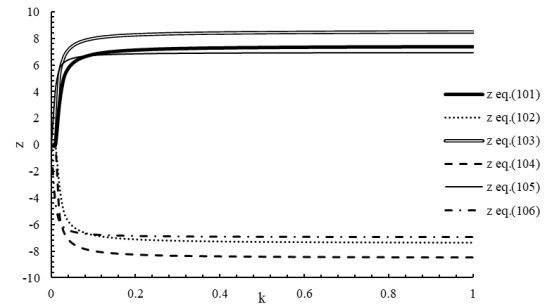
در این مقاله، مسیر ایستایی چند خرپا به صورت تحلیلی حساب شدند. چون انجام این کار برای سازه‌های بزرگ ممکن نیست، پاسخ‌های دو خرپای صفحه‌ای و دو خرپای سه‌بعدی ساده به دست آمدند. تحلیل مومسانی برپایه‌ی یک نمودار تنش-کرنش دوخطی انجام گرفت. می‌توان در بارگذاری‌های افزایشی از این گونه سخت‌شوندگی بهره جست. همچنین، از کرنش گرین برای برپایی تابع کارمایه‌ی نهفته‌ی کل بهره‌جویی شد. درگام نخست و با پنداشت رفتار کشسان برای تمامی اعضا، مسیرهای ایستایی احتمالی به دست آمدند. بهره‌جویی از تقارن هندسه و بارگذاری سازه در یافتن مسیر ایستایی درست کمک شایانی نمودند. برای یافتن حد پایداری، صفر شدن مقادیرهای ویژه‌ی ماتریس سختی هندسی بررسی گردید. با حساب نمودن کرنش در هر گام درکنار پایداری سازه، ته مسیر ایستایی در هر گام پیدا شد. با ادامه‌ی این روند، افزون بر تابع مسیر ایستایی، نمودار بار-جابجایی وابسته در گام‌های مختلف به دست آمدند. آشکار است که پاسخ‌های بسته یا صریح نویسندگان ارزشمندند. زیرا، آن‌ها آزمون سنگ نشانه دقیق‌اند و در بررسی درستی روش‌های نو در واکاوی ناخطی هندسی و مواد خرپا کاربرد دارند. افزون بر این‌ها، راه‌حل پیشنهادی می‌تواند جنبه‌ی آموزشی برای پژوهش‌گران جوان داشته باشد.

۶- مراجع

- [1] Huang, Y., Xuem, Y., Wang, X. and Han, F. (2017), "Effect of cross sectional shape of struts on the mechanical properties of aluminum based pyramidal lattice structures", *Materials Letters*, Vol. 202, pp. 55-58.
- [2] Queheillalt, D.T. and Wadley, H.N. (2005), "Pyramidal lattice truss structures with hollow trusses", *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 397(1-2), pp. 132-137.
- [3] Xiong, J., Ghosh, R., Ma, L., Ebrahimi, H., Hamouda, A., Vaziri, A. and Wu, L. (2014), "Bending behavior of lightweight sandwich-walled shells with pyramidal truss cores", *Composite Structures*, Vol. 116, pp. 793-804.
- [4] Kala, Z. and Kalina, M. (2016), "Static equilibrium states of von mises trusses", *International Journal of Mechanics*, Vol. 10, pp. 294-298.
- [5] Kwasniewski, L. (2009), "Complete equilibrium paths for Mises trusses", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, pp. 19-26.
- [6] PSOTNÝ, M. (2003), "Von Misses truss with imperfection", *Slovak Journal of Civil Engineering*, pp. pp. 1-7.
- [7] Kaliva, M. (2016), "Stability problems of pyramidal von Mises planar trusses with geometrical imperfection", *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 1, pp. 118-123.
- [8] Halpern, A.B. and Adriaenssens, S. (2014), "Nonlinear

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{10k} l \sqrt{30k(161k-1)} \\ f''' = -\frac{3}{50k} \sqrt{30k(161k-1)} (161k-1) \end{cases} \quad (105)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{10k} l \sqrt{30k(161k-1)} \\ f''' = \frac{3}{50k} \sqrt{30k(161k-1)} (161k-1) \end{cases} \quad (106)$$



شکل ۲۷- نمودار جابه‌جایی گرهی z وابسته به وضعیت ناپایداری

رابطه‌ی زیر نقطه‌ی حدی ناپایداری مسیر ایستایی برای $k = 0.02$ را در دسترس قرار می‌دهد.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{3\sqrt{370}}{10} l = 5.770615l \\ f''' = -\frac{3996}{10000} \sqrt{370} \end{cases} \quad (107)$$

سر انجام، تابع صریح مسیر ایستایی خرپای سه‌بعدی چهارعضوی به سیمای زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \text{for } 11.96248l \leq z \\ x = 0 \\ y = 0 \\ f''' = z(z^2 - 144l^2)/l^3 \end{cases} \quad (108)$$

$$\begin{cases} \text{for } 5.770615l \leq z \leq 11.96248l \\ x = 0 \\ y = 0 \\ f''' = \frac{1}{10} z(10kz^2 - 9l^2(1 - 161k)) \end{cases}$$

۴- تقدیر و تشکر

این مقاله مستخرج از نتایج طرح تحقیقاتی اجرا شده به شماره ابلاغیه ۱۳۹۸/۰۲/۱۰۲۷ UTH: از محل اعتبارات پژوهشی دانشگاه تربت‌حیدریه می‌باشد که بدین وسیله تشکر و قدردانی می‌گردد.



- [24] Orlando, D., de Castro, C.H.L. and Gonçalves, P.B. (2018), "Nonlinear vibrations and instability of a bistable shallow reticulated truss", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 94, pp. 1479-1499.
- elastic in-plane buckling of shallow truss arches", *Journal of Bridge Engineering*, Vol. 20, pp. 1-11.
- [9] Plaut, R.H. (2018), "Snap-through of shallow reticulated domes under unilateral displacement control", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 148, pp. 24-34.
- [10] Bazzucchi, F., Manuello, A. and Carpinteri, A. (2017), "Interaction between snap-through and Eulerian instability in shallow structures", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 88, pp. 11-20.
- [11] Bazzucchi, F., Manuello, A. and Carpinteri, A. (2017), "Instability load evaluation of shallow imperfection-sensitive structures by form and interaction parameters", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 66, pp. 201-211.
- [12] Fan, F., Cao, Z. and Shen, S. (2010), "Elasto-plastic stability of single-layer reticulated shells", *Thin-Walled Structures*, Vol. 48(10-11), pp. 827-836.
- [13] Zhi, X., Fan F. and Shen S. (2010), "Elasto-plastic instability of single-layer reticulated shells under dynamic actions", *Thin-Walled Structures*, Vol. 48(10-11), pp. 837-845.
- [14] Gerstmayr, J. and Irschik, H. (2003), "Vibrations of the elasto-plastic pendulum", *International journal of non-linear mechanics*, Vol. 38(1), pp. 111-122.
- [15] Savi, M.A. and Pacheco, P. (1997), "Non-linear dynamics of AN elasto-plastic oscillator weith kinematic and isotropic hardening", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 207(2), pp. 207-226.
- [16] Brinkmeyer, A., Santer, M., Pirrera, A. and Weaver, P. (2012), "Pseudo-bistable self-actuated domes for morphing applications", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49(9), pp. 1077-1087.
- [17] Brinkmeyer, A., Pirrera, A., Santer, M. and Weaver, P. (2013), "Pseudo-bistable pre-stressed morphing composite panels", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, pp. 1033-1043.
- [18] Feng, L.-J., Wu, L.-Z. and Yu G.-C. (2016), "An hourglass truss lattice structure and its mechanical performances", *Materials & Design*, Vol. 99, pp. 581-591.
- [19] Yungwirth, C.J., Radford, D.D., Aronson, M. and Wadley, H. N. (2008), "Experiment assessment of the ballistic response of composite pyramidal lattice truss structures", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 39, pp. 556-569.
- [20] Danso, L.A. and Karpov, E.G. (2017), "Cusp singularity-based bistability criterion for geometrically nonlinear structures", *Extreme Mechanics Letters*, Vol. 13, pp. 135-140.
- [21] Wang, J., Evans, A., Dharmasena, K. and Wadley, H. (2003), "On the performance of truss panels with Kagome cores", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 6981-6988.
- [22] Ligaro, S.S. and Valvo, P.S. (2006), "Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses", *International journal of solids and structures*, Vol. 43, pp. 4867-4887.
- [23] Castro, C. (2014), "Nonlinear vibrations and stability of shallow pyramidal trusses", *Civil Engineering Department, PUC-Rio, Brazil Master's Thesis*.