



<http://journalisss.ir>

## تحلیل کمانش و ارتعاشات ستون‌های با مقطع متغیر تحت تغییرات حرارتی

امیرحسین طاهرخانی<sup>۱</sup> و مجید امین افشار<sup>۲\*</sup>

۱- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین، ایران

۲- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین، ایران

\*قزوین، صندوق پستی ۹۶۸۱۸-۳۴۱۴۸، [mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir](mailto:mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir)

### چکیده

استفاده از اعضای با مقطع متغیر به علت صرفه اقتصادی کاربرد فراوانی در سازه‌های فولادی به خصوص سوله‌های صنعتی دارد. اما با افزایش دمای ناشی از تغییرات حرارتی، مشخصات مقاومتی و سختی اعضای قاب‌های صنعتی به سرعت کاهش می‌یابد. برای طرح کامل و ایمن لازم است پایداری (کمانش حرارتی) در قاب‌های صنعتی بررسی شود. در مقاله حاضر، کمانش حرارتی و ارتعاشات ناشی از تغییرات حرارتی ستون‌های الاستیک غیرمنشوری با روش رایلی-ریتز بررسی می‌شود. در گام اول، با استفاده از روش همیلتون، معادله دیفرانسیل حاکم استخراج می‌گردد. در گام بعدی، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل محاسبه شده و از سری چیشیف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی و تابع وزن استفاده می‌گردد. در گام آخر، پس از استخراج ماتریس‌های سختی مصالح، سختی هندسی و ماتریس جرم در نهایت مقادیر ویژه معادله بررسی می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش هم‌زمان شیب مقطع ( $\beta$ ) و ضریب تغییرات حرارتی ( $\gamma$ ) تأثیر قابل توجهی در افزایش ضریب طول مؤثر ( $K$ ) و کاهش ظرفیت بارکمانشی ( $P_{cr}$ ) در تمامی شرایط مرزی تکیه‌گاهی مختلف دارد. هم‌چنین افزایش هم‌زمان شیب مقطع ( $\beta$ ) و ضریب تغییرات حرارتی ( $\gamma$ ) بسته به نوع شرایط مرزی تکیه‌گاهی سبب افزایش یا کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\bar{\omega}$ ) می‌گردد. برای به‌کارگیری نتایج در محاسبات مهندسی، از منحنی‌های هم‌تراز برای ارائه نتایج و نمایش نمودارها استفاده می‌شود. از نتایج تحقیق‌های پیشین برای اعتبارسنجی استفاده می‌شود. تطابق قابل قبولی بین نتایج حاضر و تحقیق‌های پیشین برقرار است.

### واژگان کلیدی

پایداری، کمانش حرارتی، پایداری مقاطع متغیر، اصل همیلتون، تحلیل مقدار ویژه

## Analysis of buckling and vibrations of Non-Prismatic Columns under thermal changes

Amir Hossein Taherkhani, Majid Amin Afshar

### Abstract

Due to economic efficiency, members with variable cross-sections are widely used in steel structures, especially industrial sheds. But with the increase in temperature caused by thermal changes, the strength and hardness characteristics of industrial frame members decrease rapidly. It is necessary to check stability (thermal buckling) in industrial frames for a safe and complete design. In this article, thermal buckling and vibrations caused by thermal changes of non-radiative elastic columns are investigated by the Rayleigh-Ritz method. In the next step, the weak form of the differential equation is calculated and the Chebyshev series is used as the transverse displacement function and the weight function. In the last step, after extracting material stiffness matrices, geometric stiffness, and mass matrix, the eigenvalues of the equation are checked. The results show that the simultaneous increase of the slope of the section and the coefficient of thermal changes significantly affect the effective length coefficient and reduce the buckling load capacity in all the boundary conditions of different supports. Also, the simultaneous increase of the slope of the cross-section and the coefficient of thermal variation, depending on the type of boundary conditions of the support, cause an increase or decrease in the dimensionless natural frequency. Aligned curves are used to present results and display graphs to apply results in engineering calculations. The results of previous research are used for validation. There is an acceptable agreement between the present results and previous studies.

### Keywords

Stability, Thermal buckling, Stability of variable sections, Hamilton's principle, Eigenvalue analysis



## ۱- مقدمه

سازه‌های ساختمانی و صنعتی در زمان رخداد آتش‌سوزی تحت بار حرارتی قرار می‌گیرند. مهم‌ترین اثر تغییرات حرارتی در اعضای سازه‌ای (تیرها و ستون‌ها) کماتش حرارتی است. پس برای طراحی ایمن و کامل لازم است، پایداری (بارکمانشی بحرانی) اعضای سازه‌ای تحت اثر تغییرات حرارتی (کمانش حرارتی) در زمان آتش‌سوزی بررسی شود. طبق تعریف **اولر**<sup>۱</sup> [۱]، بار کمانشی بحرانی در واقع بیش‌ترین نیرویی است که یک ستون می‌تواند تحمل کند بدون این که خم شود و کمانش کند. **اولر**، **تیموشنکو**<sup>۲</sup> [۲]، **بازانت**<sup>۳</sup> [۳]، **مورلی**<sup>۴</sup> [۴]، به مطالعه ظرفیت بار کمانشی ستون‌های الاستیک بر مبنای روش‌های حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم یا تقریبی عددی پرداختند. **شی‌رونگ**<sup>۵</sup> و **همکاران** [۵]، به مطالعه پاسخ پس‌کمانش یک تیر الاستیک دوسر ساده تحت افزایش دمای غیریکنواخت پرداختند. **وانگ** و **وانگ**<sup>۶</sup> [۶]، پایداری اعضای سازه‌ای از قبیل تیرها، ستون‌ها و صفحات را بررسی کردند. ایشان از روش‌های تحلیلی برای حل معادلات متشکله استفاده کردند. **رافتویانیس** و **همکاران**<sup>۷</sup> [۷]، پایداری ستون‌های دابل غیرمنشوری تحت فشار محوری و خمش دومحوره را بررسی کردند. مقطع عضو در دو جهت محور اصلی و فرعی به صورت خطی تغییر می‌کند و تغییرات ممان اینرسی با توان دو است. **سینگ و لی**<sup>۸</sup> [۸]، به بررسی بار کمانشی ستون‌های غیرمنشوری الاستیک‌گیردار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی پرداختند. بار بحرانی ستون در پنج مد اول ستون غیرمنشوری برای شرایط مرزی (دوسر مفصلی، دوسرگیردار، گیردار-مفصلی و گیردار-آزاد) بررسی شده است. نتایج با مدل‌های اجزای محدود و تفاضل محدود صحت‌سنجی شده است. **پینارباسی**<sup>۹</sup> [۹]، به تحلیل بار کمانشی ستون‌های غیرمنشوری با تکیه‌گاه‌های ارتجاعی پرداخت. ایشان از روش تکرار متغیر برای حل معادله متشکله استفاده کردند. تغییرات سختی به دو صورت نمایی و خطی در نظر گرفته شده است. **قنادپور** و **همکاران** [۱۰]، به مطالعه کمانش و ارتعاشات تیر اولر-برنولی غیرمحللی به روش ریتز پرداختند. **ژانگ** و **همکاران**<sup>۱۱</sup> [۱۱]، به مطالعه پایداری ستون‌های دابل غیرمنشوری الاستیک با مقطع عرضی لوله‌ای

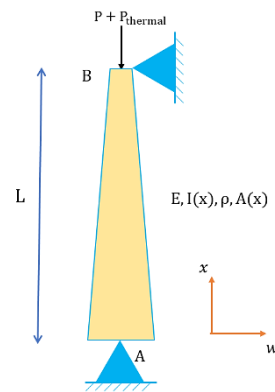
پرداختند. ایشان از روش‌های اجزای محدودی برای حل معادله دیفرانسیل متشکله بهره بردند. سپس با بهره‌گیری از تکنیک‌های برازش منحنی<sup>۱۱</sup> از روابط صریح برای محاسبه ظرفیت بار بحرانی استفاده کردند. **اواکار**<sup>۱۲</sup> [۱۲]، به مطالعه کمانش ستون‌های فولادی الاستیک تحت فشار محوری پرداخت. ایشان کمانش ستونی با مقطع (مربعی، مستطیلی، دایره‌ای) را در شرایط مرزی مختلف با روش اجزای محدود بررسی کرد. همچنین اثر شرایط مرزی مختلف، مقطع عرضی و نسبت لاغری را بر بار کمانشی ستون‌های فولادی مورد بررسی قرار داد. **کائو** و **همکاران**<sup>۱۳</sup> [۱۳]، به بررسی پایداری ستون‌های الاستیک منشوری فشاری با تکیه‌گاه‌های دوسر ساده با فنرهای دورانی در دو انتها پرداختند. ایشان از روش‌های تحلیلی برای مطالعه کمانش ستون مذکور با فرض برون‌محوری اولیه استفاده کردند. **فتحی** و **همکاران** [۱۴]، به بررسی معادلات شیب-افت برای ستون‌های دارای نقص اولیه و اتصالات نیمه‌صلب با در نظرگیری اثر برشی پرداختند. نقص‌های هندسی ستون‌ها در حین نصب از قبیل ناشاقولی، خروج از مرکزیت، انحنای ستون و همچنین اثر تغییرشکل‌های برشی در این تحقیق لحاظ شده است. **رضایی‌پژند** و **همکاران** [۱۵]، پایداری جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای دوسر ساده با مقطع متقارن ساخته‌شده از مواد تابعی دوطرفه را با استفاده از روش ریتز مورد مطالعه قرار دادند. **سلطانی** و **عسگریان** [۱۶]، به بررسی پایداری ستون‌های غیرمنشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی و بسط مک‌لورن پرداختند. **عسگریان** و **سلطانی** [۱۷]، به مطالعه پایداری و ارتعاش آزاد ستون‌های غیرمنشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی پرداختند. استفاده از اعضای با مقطع متغیر به علت صرفه اقتصادی کاربرد فراوانی در سازه‌های فولادی به خصوص سوله‌های صنعتی و پل‌های فلزی دارد از طرفی سازه‌های فولادی در مقابل گرمای زیاد دچار انبساط طولی می‌شوند. در تحقیق‌های پیشین، اثر هم‌زمان تغییرات ممان اینرسی در طول عضو و تغییرات حرارتی بر کمانش ستون‌های الاستیک بررسی نشده است. در مقاله حاضر، در مدلی جامع ارتعاشات و پایداری ستونی با مقطع متغیر تحت تغییرات حرارتی بررسی می‌شود. برای حل، از روش عددی رایلی-ریتز استفاده می‌شود.

<sup>8</sup> Singh and Li<sup>9</sup> Pinarbasi<sup>10</sup> Zhang et al<sup>11</sup> Fitting Processes<sup>12</sup> Avcar<sup>13</sup> Cao et al<sup>1</sup> Euler<sup>2</sup> Timoshenko<sup>3</sup> Bazant<sup>4</sup> Morley<sup>5</sup> Shi-rong<sup>6</sup> Wang and Wang<sup>7</sup> Raftoyiannis et al

به این صورت که از سری چبیشف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی و تابع وزن استفاده می‌گردد. ممان اینرسی و مساحت عضو به صورت تابع خطی بر حسب ممان اینرسی ابتدایی و مساحت ابتدایی در معادله اعمال می‌شود. معادله هدف از نوع مقدار ویژه است. از تکنیک‌های ریشه‌یابی برای حل معادله و یافتن پارامتر پاسخ (طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد) استفاده می‌شود.

## ۲- مدل‌سازی و تعریف مسئله

مطابق شکل (۱) ستون الاستیک غیرمنشوری با شرایط مرزی دو انتها مفصلی، تحت کمانش حرارتی با مشخصات گشتاور دوم سطح  $(I(x))$ ، مدول الاستیسیته  $(E)$ ، جرم واحد طول  $(\rho \times A(x))$ ، طول  $(L)$ ، سطح مقطع  $(A(x))$  و جرم مخصوص  $(\rho(x))$  در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، نیروی ناشی از حرارت  $(P_{thermal})$  و بار کمانش بحرانی  $(P)$



شکل ۱- ستون دو سر مفصل با مقطع متغیر تحت بار محوری و تغییرات حرارتی

## ۲-۱- توزیع مقطع متغیر در ستون‌های فولادی

در اعضای غیرمنشوری به دلیل غیرثابت بودن مقادیر طول و عرض، گشتاور دوم سطح مقطع و مساحت مقطع در حال تغییر هستند. جهت اعمال اثر غیریکنواختی مقطع،  $(A_0)$  و  $(I_0)$  به ترتیب سطح مقطع بزرگ‌تر در ابتدای عضو و ممان اینرسی آن است.  $(X)$  فاصله هر نقطه از ستون،  $(L)$  طول ستون،  $(\beta)$  شیب مقطع،  $(b)$  عرض، ارتفاع مقطع و  $(\bar{x} = \frac{x}{L})$  فاصله بی‌بعد هر نقطه از ستون هستند. ضریب  $(\beta)$  مقادیری از ۰ تا ۰/۹ دارد [۱۶].

مطابق تئوری تیر اوپلر-برنولی، فرضیه‌های ذیل برای تحلیل پایداری ستون شکل (۱) در نظر گرفته شده است:

- در مقاله حاضر، تنها اثر کمانش خمشی در ستون مورد نظر لحاظ می‌شود. در واقع، فقط اثر کرنش نرمال ایجاد شده  $\epsilon_{xx}$  در معادله دیفرانسیل حاکم لحاظ شده و از اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی  $\epsilon_{zz}(x,z) = 0, \gamma_{xz}(x,z) = 0$  در پلان  $x-z$  صرف نظر می‌شود. اگر اثرات کمانش خمشی-پیچشی به صورت هم‌زمان در معادله حاکم لحاظ گردد، علاوه بر پارامترهای ممان اینرسی حول محور قوی  $(I_y)$ ، مدول الاستیسیته  $(E)$ ، پارامترهای مدول برشی  $(G)$ ، ممان اینرسی پیچشی  $(J)$ ، ممان اینرسی حول محور ضعیف  $(I_z)$ ، ضریب تابیدگی  $(I_\phi)$  بر مقدار بار کمانشی بحرانی اثرگذار خواهد بود [۱۸].

- اتصالات ستون در قاب‌ها، معمولاً از نوع اتصالات نیمه‌صلب است. به همین منظور اثر اتصالات نیمه‌صلب با استفاده از فنرهای دورانی و خطی در محاسبات مدل‌سازی می‌شود. در مقاله حاضر، کمانش و ارتعاشات تیرهای غیرمنشوری تحت تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی ایده‌آل بررسی شده و از روش ریتز برای حل معادله دیفرانسیل استفاده می‌شود. روش ریتز با استفاده از سری‌های چبیشف سرعت همگرایی بالایی برای رسیدن به پاسخ مورد نظر دارد. اما عیب این روش این است که نمی‌توان شرایط مرزی نیمه‌صلب (فنرهای دورانی و خطی) را در آن مدل‌سازی کرد. برای مدل‌سازی ستون‌های با اتصالات نیمه‌صلب می‌توان از روش المان محدود بهره گرفت.

- در مقاله حاضر، توزیع دما به صورت یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. در این فرضیه، دمای ستون به صورت یکنواخت از دمای  $(T_0)$  به دمای نهایی  $(T_f)$  تغییر می‌کند. روش دیگری نیز به نام توزیع دمای خطی  $(LTR)$ <sup>۱</sup> برای اعمال توزیع دما در ستون‌ها وجود دارد. در این فرضیه، دمای سطح بالایی آن  $(T_0)$  است و به صورت خطی در جهت ضخامت به سمت دمای سطح پایینی  $(T_1)$  تغییر می‌کند. معمولاً از فرضیات تیر تیموشنکو برای مدل‌سازی تغییرات دمای خطی استفاده می‌شود [۱۹].

- از لحاظ ساختار مواد سازنده، کمانش ستون‌ها به دو نوع کمانش الاستیک و غیرالاستیک تقسیم می‌شود. در کمانش الاستیک فرض می‌شود منحنی تنش-کرنش ماده

<sup>۱</sup> Linear Temperature Rise

$$P_{\text{thermal}} = \alpha TEA \quad (3)$$

در رابطه فوق ( $\alpha$ ) ضریب انبساط طولی ستون، ( $T$ ) تغییرات دما و ( $E$ ) مدول الاستیسته ستون است.

در معادله (۱) پارامتر خیز جانبی ستونی ( $W$ ) مطابق اصل جداسازی متغیرها، به صورت ضرب ( $w(x)$ ) (پارامتر تابع شکل) در ( $T(t)$ ) (پارامتر تابع زمانی) در نظر گرفته می شود.

$$W = w(x)T(t) \quad (4)$$

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (5)$$

با جای گذاری معادله (۴) و (۵) در معادله (۱)، معادله (۱) به صورت زیر بیان می شود.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \rho A(x) w \omega^2 + (P + \alpha TEA(x)) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0 \quad (6)$$

شرایط مرزی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل شده به صورت زیر تعریف می شود.

مفصلی-مفصلی (S-S):

$$w(0) = w(L) = \left( \frac{d^2 w(0)}{dx^2} \right) = \left( \frac{d^2 w(L)}{dx^2} \right) = 0 \quad (7)$$

گیردار-مفصلی (C-S):

$$w(0) = w(L) = \left( \frac{dw(0)}{dx} \right) = \left( \frac{dw(L)}{dx} \right) = 0 \quad (8)$$

گیردار-آزاد (C-F):

$$w(0) = \left( \frac{dw(0)}{dx} \right) = \left( \frac{d^2 w(L)}{dx^2} \right) = \left( \frac{d^3 w(L)}{dx^3} \right) = 0 \quad (9)$$

گیردار-گیردار (C-C):

$$w(0) = \left( \frac{dw(0)}{dx} \right) = w(L) = \left( \frac{dw(L)}{dx} \right) = 0 \quad (10)$$

برای تعمیم پذیری پاسخهای معادله دیفرانسیل فوق از بی بعدسازی پارامترها استفاده می شود. پارامترهای بی بعد هندسی به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{L} \quad (11)$$

$$\bar{P} = \frac{PL^2}{EI_0}, \quad \gamma = \frac{\alpha TA_0 L^2}{I_0}$$

خطی است و از روابط قانون هوک پیروی می کند. در این حالت تنش های وارده کم تر از تنش تسلیم است و مدول الاستیسته مقدار ثابتی دارد. در کمانش غیرالاستیک با افزایش میزان تنش ها بیش از میزان تنش تسلیم مصالح سازنده، منحنی تنش- کرنش غیرخطی می شود. لذا مقدار مدول الاستیسته، متناسب با تنش اعمال شده تغییر می کند. در مقاله حاضر رفتار ستون، الاستیک فرض شده و رفتار مصالح همگن از قانون هوک پیروی می کند. [۱۷].

جدول ۱- معادلات حاکم بر تغییرات مساحت و ممان اینرسی بی بعد

مقطع		حالت
$\bar{I}(\bar{x})$	$\bar{A}(\bar{x})$	
		۱. طول مقطع به صورت خطی کاهش می یابد. اما عرض مقطع ثابت است.
$I_0(1 - \beta \bar{x})$	$A_0(1 - \beta \bar{x})$	۲. عرض مقطع در امتداد عضو با شیب $\beta$ کاهش می یابد. اما طول مقطع ثابت است.
$I_0(1 - \beta \bar{x})^3$	$A_0(1 - \beta \bar{x})$	۳. طول و عرض مقطع مستطیلی در راستای عضو و با شیب $\beta$ به صورت هم زمان کاهش می یابد.
$I_0(1 - \beta \bar{x})^4$	$A_0(1 - \beta \bar{x})^2$	

۲-۲- معادله دیفرانسیل ستون با مقطع متغیر با تغییرات حرارتی

معادله دیفرانسیل ستونی مورد نظر با اثر انرژی کرنشی، جرم در واحد طول و بار محوری بر مبنای روش همیلتون<sup>۱</sup> به صورت زیر بیان می شود. ( $W$ ) برابر با خیز جانبی ستونی مورد نظر است.

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} \right) + \rho A(x) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) + P_t \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} \right) = 0 \quad (1)$$

در رابطه فوق شامل نیروی بار کمانشی بحرانی و نیروی ناشی از حرارت است. این نیرو بر اساس رابطه زیر محاسبه می شود.

$$P_t = P + P_{\text{thermal}} \quad (2)$$

( $P$ ) بار کمانش بحرانی و ( $P_{\text{thermal}}$ ) نیروی ناشی از حرارت است.

<sup>1</sup> Hamilton

### ۲-۳- حل معادله با روش رایلی-ریتز

در بخش قبل معادله حاکم بر مجموعه (۱) و شرایط مرزی مسئله در روابط (۷) الی (۱۰) ارائه شد. در این بخش با استفاده از روش عددی رایلی-ریتز معادله مذکور بررسی می‌شود. بدین منظور لازم است که ابتدا شکل ضعیف معادله تشکیل شود. در گام بعدی، از سری‌های چندجمله‌ای چبیشف برای استخراج ماتریس‌های عضو استفاده می‌شود.

### ۲-۴- شکل ضعیف‌شده معادله متشکله

در پژوهش حاضر از روش رایلی-ریتز برای حل معادله متشکله استفاده می‌شود. در این روش، تابع باقی‌مانده  $R(\bar{x})$  در تابع وزن  $\varphi(\bar{x})$  ضرب شده و از حاصل آن انتگرال‌گیری می‌شود. پاسخ به‌صورت معادله نمایش داده می‌شود. در این رابطه تابع وزن  $\varphi(\bar{x})$  است که باید نسبت به  $x$  حداقل دو بار مشتق‌پذیر باشد.

$$\int_0^1 \varphi(\bar{x}) R(\bar{x}) d\bar{x} \\ R(\bar{x}) = \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left( \bar{I}(\bar{x}) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) - \bar{A}(\bar{x}) \bar{\omega}^2 \bar{w}(\bar{x}) + \\ (\bar{P} + \gamma \bar{A}(\bar{x})) \frac{d^2 \bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \quad (12)$$

معادله (۱۲) دو بار انتگرال‌گیری جزیه‌جز شده تا دومرتبه مشتق‌گیری با تابع وزن  $\varphi(\bar{x})$  مبادله گردد و دومرتبه مشتق‌گیری روی متغیر وابسته  $\bar{w}(\bar{x})$  باقی بماند. در نهایت شکل ضعیف معادله به شکل رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Pi = \int_0^1 [\bar{I}(\bar{x}) \left( \frac{d^2 \varphi}{d\bar{x}^2} \right) \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) \\ - (\bar{P} + \gamma \bar{A}(\bar{x})) \left( \frac{d\varphi}{d\bar{x}} \right) \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right) - \bar{\omega}^2 \bar{A}(\bar{x}) \bar{w}(\bar{x}) \varphi(\bar{x})] d\bar{x} = 0 \quad (13)$$

رابطه (۱۳) شکل ضعیف رابطه (۱۲) را نشان می‌دهد. برای حل معادله (۱۳) باید معادله تغییرمکان عرضی را حدس زد، به‌طوری‌که شرایط مرزی را ارضا کند. در مقاله حاضر، از سری‌های چندجمله‌ای چبیشف به‌عنوان تابع تغییرمکان عرضی استفاده می‌شود.

$$w(\bar{x}) = \prod_{m=1}^{n_1} (\bar{x}_m - \bar{x})^{n_2} \sum_{j=1}^n C_j B_{j-1}(\bar{x}) \quad (14)$$

در این رابطه  $(C_j)$  ماتریس بردار ویژه،  $(n)$  تعداد جملات سری،  $(n_1)$  تعداد تکیه‌گاه‌ها در طول ستونی،  $(\bar{x}_m)$  فاصله بی‌بعد

تکیه‌گاه  $m$ ام از ابتدای ستونی و  $(n_2)$  پارامتری وابسته به نوع تکیه‌گاه است.  $(n_2)$  برای تکیه‌گاه ساده برابر ۱ و برای تکیه‌گاه گیردار برابر ۲ است.

$$B_0(\bar{x}) = 1 \quad (15)$$

$$B_1(\bar{x}) = \bar{x} \\ B_{j+1} = 2\bar{x}B_j(\bar{x}) - B_{j-1}(\bar{x}) \quad (16)$$

رابطه (۱۶)، رابطه‌ای بازگشتی بر حسب  $\bar{x}$  است. جملات بالاتر بر حسب جملات قبلی محاسبه می‌شوند. در روش رایلی-ریتز تابع وزن  $\varphi(\bar{x})$  نیز برابر تابع تغییرمکان عرضی در نظر گرفته می‌شود. [۱۰]

$$\varphi(\bar{x}) = \prod_{m=1}^{n_1} (\bar{x}_m - \bar{x})^{n_2} \sum_{j=1}^n C_j B_{j-1}(\bar{x}) \quad (17)$$

روش رایلی-ریتز به‌صورت رابطه زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_j} = 0 \quad (18)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۴) و (۱۷) در رابطه (۱۳) و با استفاده از ویژگی روش رایلی-ریتز (۱۸)، در نهایت ماتریس‌های سختی به‌صورت رابطه زیر نوشته می‌شوند.

$$K_{ij(S)} = \int_0^1 \bar{I}(\bar{x}) \left( \frac{d^2 \varphi_i}{d\bar{x}^2} \right) \left( \frac{d^2 \bar{w}_j}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \quad (19)$$

$$K_{ij(G1)} = \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_i}{d\bar{x}} \right) \left( \frac{d\bar{w}_j}{d\bar{x}} \right) d\bar{x} \quad (20)$$

$$K_{ij(G2)} = \int_0^1 \gamma \bar{A}(\bar{x}) \left( \frac{d\varphi_i}{d\bar{x}} \right) \left( \frac{d\bar{w}_j}{d\bar{x}} \right) d\bar{x} \quad (21)$$

$$M_{ij} = \int_0^1 \bar{A}(\bar{x}) \varphi_i \bar{w}_j d\bar{x} \quad (22)$$

در رابطه (۱۹) الی (۲۲)  $(K_{ij(S)})$  و  $(K_{ij(G1)})$  و  $(K_{ij(G2)})$  و  $(M_{ij})$  به‌ترتیب معرف ماتریس سختی مصالح، ماتریس سختی هندسی بار محوری، ماتریس سختی هندسی تغییرات حرارتی و ماتریس جرم ستونی هستند.

$$([K_S] - [K_{G2}] - \bar{\omega}^2 [M]) \{c\} = 0 \quad (23)$$

رابطه (۲۳)، رابطه مورد نظر برای محاسبه مقدار ضریب فرکانس طبیعی بی‌بعد است. رابطه مذکور از نوع مقدار ویژه است. برای حل لازم است از روش‌های ریشه‌یابی عددی استفاده شود.

$$|[K_S] - [K_{G2}] - \bar{\omega}^2 [M]| = 0 \quad (24)$$

به‌طور مشابه رابطه مورد نظر برای محاسبه بارکمانشی ستونی به این صورت بیان می‌شود.



## ۱-۳- اعتبارسنجی نتایج

نخست برای اعتبارسنجی نتایج حاصل از این پژوهش، به مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل‌های ارائه شده توسط محققین پرداخته می‌شود. همان‌طور که بیان شد، **عسگریان** و **سلطانی** [۱۶] به بررسی ظرفیت بار کمانشی و فرکانس طبیعی ستون غیرمنشوری الاستیک با روش ترکیبی سری‌های توانی گالرکین پرداختند. همچنین در بخشی از کتاب **وانگ** [۶]، ظرفیت بار کمانشی ستون الاستیک با مقطع متغیر با استفاده از روش‌های تحلیلی بررسی شده است. در مقاله حاضر به بررسی ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی با مقطع متغیر تحت تغییرات حرارتی با روش عددی رایلی-ریتز پرداخته می‌شود. از نتایج تحقیق‌های نام‌برده برای صحت‌سنجی مقاله حاضر استفاده می‌شود. بدین منظور، باید اثر تغییرات حرارتی در مقاله حاضر نادیده گرفته شود.

جدول ۲- شرایط مرزی مورد مطالعه در مقاله حاضر

گیردار-آزاد	C-F
گیردار-مفصلی	C-S
گیردار-گیردار	C-C
مفصلی-مفصلی	S-S

$$|[K_S] - P_{cr}[K_{G1}] - [K_{G2}]| = 0 \quad (25)$$

برای تعمیم‌پذیری نتایج به محاسبات مهندسی به‌جای پارامتر ظرفیت بار بحرانی ( $P_{cr}$ ) از پارامتر ضریب طول مؤثر ( $K$ ) برای ارائه نتایج پژوهش حاضر استفاده می‌شود.

ضریب طول مؤثر همان فاصله بین دو نقطه عطف متوالی در شکل خمیده ستون مقید ناشی از کمانش است. پارامتر مذکور پارامتری بی‌بعد بوده و فقط تابع شرایط مرزی مختلف تکیه‌گاهی است.

$$K = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_0}{P_{cr} L^2}} \quad (26)$$

## ۳- بحث روی نتایج

رابطه (۲۴) و (۲۵) روابط مورد نظر برای محاسبه فرکانس طبیعی بی‌بعد و بار کمانشی بی‌بعد هستند و برای حل لازم است مقادیر مذکور به وسیله محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب محاسبه شوند. همان‌طور که اشاره شد از روش رایلی-ریتز برای محاسبه تابع شکل معادله استفاده می‌شود. در روش‌های عددی افزایش دقت محاسبات به وسیله افزایش جملات تابع شکل (۱۷) انجام می‌شود. به همین منظور معادله (۱۷) تا جملات سری دهم بررسی می‌شود. تمامی مراحل فوق از جمله محاسبه ماتریس سختی و دترمینان ماتریس (مقدار ویژه) به وسیله کدنویسی در نرم‌افزار متلب<sup>۱</sup> انجام می‌شود.

جدول ۳- مقادیر بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ستونی با مقطع متغیر (تغییرات خطی ممان اینرسی) با شرایط مرزی مختلف

سلطانی و		عسگریان		وانگ و وانگ [۶]		نتایج جدید		نتایج جدید		$\beta$ (شیب مقطع)	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$		$\bar{\omega}$		$\bar{P}_{cr}$		$\bar{P}_{cr}$		$\bar{P}_{cr}$			
N=10	N=5	N=1	$\bar{\omega}$	N=10	N=5	N=1	$\bar{P}_{cr}$	N=10	N=5	N=1	$\bar{P}_{cr}$
9.869	9.869	10.950	9.868	9.372	9.372	11.400	9.372	9.372	9.372	0.1	
9.857	9.857	10.950	9.860	8.343	8.343	10.200	8.343	8.343	8.343	0.3	S-S
9.825	9.825	10.95	9.825	7.256	7.256	9.000	7.256	7.256	7.256	0.5	
15.527	15.527	20.357	15.527	19.169	19.169	27.750	19.168	19.168	19.168	0.1	
15.768	15.769	20.015	15.768	17.035	17.035	23.250	17.035	17.035	17.035	0.3	C-S
16.044	16.044	19.540	16.044	14.739	14.740	18.750	14.739	14.739	14.739	0.5	
3.631	3.631	4.553	3.631	2.393	2.393	2.850	2.393	2.393	2.393	0.1	
3.916	3.916	4.761	3.916	2.235	2.235	2.550	2.235	2.235	2.235	0.3	C-F
4.315	4.315	5.071	4.315	2.062	2.062	2.250	2.062	2.062	2.062	0.5	
0.03%	0.03%	31.11%	-	0	0	44.77%	-	-	-	-	$\Delta_{max}\%$

<sup>1</sup> MATLAB

جدول ۴- مقادیر بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ستونی با مقطع متغیر (تغییرات مکعبی ممان اینرسی) با شرایط مرزی مختلف

سلطانی و			وانگ و وانگ [۶]				$\beta$	شرایط مرزی
نتایج جدید			نتایج جدید				(شیب مقطع)	
$\bar{\omega}$			$\bar{P}_{cr}$					
N=10	N=5	N=1	$\bar{\omega}$	N=10	N=5	N=1	$\bar{P}_{cr}$	
9.368	9.368	10.420	9.368	8.434	8.435	10.320	8.436	0.1
8.302	8.302	9.455	8.302	5.840	5.841	7.599	5.840	0.3
7.122	7.122	8.660	7.122	3.628	3.629	5.625	3.628	0.5
14.849	14.849	18.854	14.849	17.252	17.252	23.804	17.252	0.1
13.640	13.640	15.771	13.640	11.923	11.924	14.434	11.923	0.3
12.300	12.300	13.108	12.300	7.362	7.362	8.438	7.362	0.5
3.559	3.559	4.331	3.559	2.246	2.246	2.579	2.246	0.1
3.667	3.667	4.109	3.667	1.789	1.789	1.900	1.798	0.3
3.824	3.824	4.009	3.824	1.337	1.337	1.406	1.336	0.5
0	0	26.97%	-	0.5%	0.5%	55.04%	-	-
								$\Delta_{max}\%$

جدول ۵- مقادیر بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ستونی با مقطع متغیر (تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی) با شرایط مرزی مختلف

سلطانی و			وانگ و وانگ [۶]				$\beta$	شرایط مرزی
نتایج جدید			نتایج جدید				(شیب مقطع)	
$\bar{\omega}$			$\bar{P}_{cr}$					
N=10	N=5	N=1	$\bar{\omega}$	N=10	N=5	N=1	$\bar{P}_{cr}$	
9.362	9.362	10.430	9.362	7.994	7.995	9.828	7.994	0.1
8.250	8.250	9.567	8.250	4.836	4.836	6.655	4.836	0.3
6.958	6.958	9.021	6.958	2.467	2.472	4.650	2.467	0.5
14.955	14.955	18.749	14.955	16.354	16.355	22.075	16.354	0.1
13.962	13.962	15.654	13.962	9.983	9.895	11.596	9.983	0.3
12.850	12.851	13.416	12.850	5.048	5.051	6.161	5.048	0.5
3.674	3.674	4.415	3.674	2.175	2.175	2.457	2.175	0.1
3.067	3.067	4.434	3.067	1.595	1.595	1.664	1.595	0.3
4.625	4.625	4.738	4.625	1.029	1.029	1.162	1.029	0.5
0	0.008%	44.57%	-	0	0.88%	88.49%	-	-
								$\Delta_{max}\%$

گیردار-آزاد و گیردار-ساده) به صورت کلی در معادله تغییر مکان عرضی اعمال می‌شود و نیازی به حدس تابع تغییر مکان عرضی به صورت مجزا نیست.

در بخشی دیگر از صحت سنجی، مقادیر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی با تغییرات (خطی، مکعبی و مرتبه چهارم) ممان اینرسی با تغییرات حرارتی به دو روش ریتز و اجزای محدود بررسی می‌شود. بدین منظور، مقادیر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای روش ریتز با سری چند جمله‌ای چیشف (۱ و ۵ و ۱۰) و در روش اجزای محدود به‌ازای تابع خانواده هرمیتی مرتبه (۴ و ۶ و ۱۰) بررسی می‌شود.

در جدول‌های (۳) الی (۵) مقادیر ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی با تغییرات (خطی، مکعبی و مرتبه چهارم) ممان اینرسی بررسی شده است. مشخص است که نتایج مقاله حاضر با تحقیق‌های پیشین تطابق قابل قبولی دارد. چنانچه در روش پیشنهادی مقادیر ویژه به‌ازای چند جمله‌ای چیشف مرتبه یک محاسبه گردد، مقادیر ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد حداکثر ۰.۸۸٪ و ۴۵٪ خطا دارند. در صورتی که مقادیر ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌ازای ۱۰ جمله بررسی شوند، مقدار خطا حداکثر به ۰/۵ و ۰/۳ درصد کاهش می‌یابد. مزیت روش مقاله حاضر این است که سرعت همگرایی پاسخ در مقایسه با روش‌های عددی دیگر بیش‌تر است. همچنین شرایط مرزی مسئله (گیردار-ساده، ساده-ساده،



جدول ۶- مقادیر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ستونی با مقطع متغیر ( $\beta = 0.1$ ) (تغییرات خطی ممان اینرسی) و تغییرات حرارتی با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	$\gamma$ تغییرات حرارتی	FEM (روش اجزای محدود)						FEM (روش اجزای محدود)						
		روش ریتز			روش ریتز			روش ریتز			روش ریتز			
		$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			K			K			
N=10	N=5	N=1	N=10	N=6	N=4	N=10	N=5	N=1	N=10	N=6	N=4			
	0.1	9.818	9.818	10.909	9.818	9.821	10.905	1.031	1.031	0.934	1.031	1.031	0.935	
S-S	0.2	9.768	9.768	10.863	9.768	9.771	10.859	1.037	1.037	0.938	1.037	1.036	0.939	
	0.4	9.666	9.666	10.770	9.666	9.669	10.766	1.048	1.048	0.946	1.048	1.047	0.947	
C-S	0.1	15.490	15.490	20.323	15.490	15.505	20.323	0.719	0.719	0.597	0.719	0.718	0.597	
	0.2	15.453	15.453	20.289	15.453	15.468	20.289	0.721	0.721	0.598	0.721	0.720	0.598	
	0.4	15.379	15.379	20.221	15.379	15.394	20.220	0.725	0.725	0.600	0.725	0.723	0.601	
	0.1	3.565	3.565	4.478	3.565	3.565	3.577	2.072	2.072	1.892	2.072	2.072	2.061	
C-F	0.2	3.497	3.497	4.403	3.497	3.497	3.507	2.115	2.115	1.924	2.115	2.115	2.103	
	0.4	3.356	3.356	4.247	3.356	3.356	3.364	2.210	2.210	1.995	2.210	2.210	2.197	
$\Delta_{max}\%$	-	-	0	31%	-	0.09%	31%	-	0	17%	-	0.27%	17%	-

جدول ۷- مقادیر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ستونی با مقطع متغیر ( $\beta = 0.1$ ) (تغییرات مکعبی ممان اینرسی) و تغییرات حرارتی با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	$\gamma$ تغییرات حرارتی	FEM (روش اجزای محدود)						FEM (روش اجزای محدود)						
		روش ریتز			روش ریتز			روش ریتز			روش ریتز			
		$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			K			K			
N=10	N=5	N=1	N=10	N=6	N=4	N=10	N=5	N=1	N=10	N=6	N=4			
	0.1	9.315	9.315	10.373	9.315	9.317	10.332	1.088	1.088	0.983	1.088	1.088	0.988	
S-S	0.2	9.262	9.262	10.325	9.262	9.264	10.283	1.094	1.094	0.987	1.094	1.094	0.992	
	0.4	9.154	9.154	10.227	9.154	9.157	10.186	1.107	1.107	0.997	1.107	1.107	1.002	
C-S	0.1	14.810	14.810	18.817	14.810	14.821	18.817	0.758	0.758	0.645	0.758	0.758	0.645	
	0.2	14.770	14.770	18.780	14.770	14.718	18.780	0.760	0.760	0.646	0.760	0.760	0.646	
	0.4	14.619	14.619	18.707	14.619	14.703	18.707	0.765	0.765	0.649	0.765	0.764	0.649	
	0.1	3.490	3.490	4.253	3.490	3.490	3.495	2.141	2.141	1.992	2.141	2.141	2.124	
C-F	0.2	3.419	3.419	4.173	3.419	3.419	3.424	2.189	2.189	2.030	2.189	2.188	2.170	
	0.4	3.272	3.272	4.008	3.272	3.272	3.275	2.294	2.294	2.114	2.294	2.294	2.274	
$\Delta_{max}\%$	-	-	0	27%	-	0.35%	27%	-	0	15%	-	0.13%	15%	-

جدول ۸- مقادیر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ستونی با مقطع متغیر ( $\beta = 0.1$ ) (تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی) و تغییرات حرارتی با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	$\gamma$ تغییرات حرارتی	FEM (روش اجزای محدود)						FEM (روش اجزای محدود)						
		روش ریتز			روش ریتز			روش ریتز			روش ریتز			
		$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			K			K			
N=10	N=5	N=1	N=10	N=6	N=4	N=10	N=5	N=1	N=10	N=6	N=4			
	0.1	9.310	9.310	10.385	9.310	9.312	10.316	1.117	1.117	1.007	1.117	1.117	1.016	
S-S	0.2	9.256	9.256	10.337	9.256	9.259	10.267	1.124	1.124	1.011	1.124	1.124	1.021	
	0.4	9.149	9.149	10.240	9.149	9.151	10.169	1.137	1.137	1.021	1.137	1.137	1.031	
C-S	0.1	14.916	14.916	18.713	14.916	14.926	18.713	0.779	0.779	0.670	0.779	0.778	0.670	
	0.2	14.877	14.877	18.676	14.877	14.887	18.676	0.781	0.781	0.671	0.781	0.780	0.671	
	0.4	14.799	14.799	18.603	14.799	14.809	18.603	0.785	0.785	0.674	0.785	0.785	0.674	
	0.1	3.606	3.606	4.337	3.606	3.606	3.610	2.174	2.174	2.040	2.174	2.174	2.153	
C-F	0.2	3.536	3.536	4.258	3.536	3.536	3.539	2.220	2.220	2.078	2.220	2.220	2.199	
	0.4	3.391	3.391	4.095	3.391	3.391	3.393	2.323	2.323	2.160	2.323	2.323	2.298	
$\Delta_{max}\%$	-	-	0	26%	-	0.07%	26%	-	0	14%	-	0.13%	14%	-

دقیق در روش ریتز بالاتر است. در روش ریتز پارامترهای مذکور تنها به‌ازای ۵ جمله به دقت قابل قبولی میل می‌کند. درحالی‌که، در

مطابق جدول‌های (۶) الی (۸) مشخص است که مقادیر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد در دو روش اجزای محدود و ریتز دقیقاً هم‌خوانی دارد. سرعت همگرایی به پاسخ

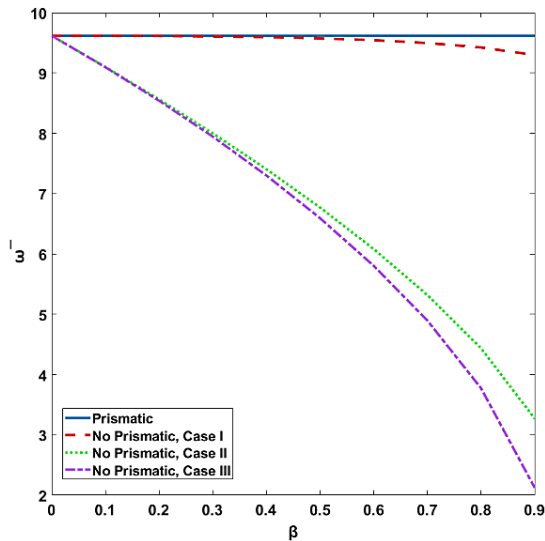


روش اجزای محدود به‌ازای خانوادهٔ هرمیتی مرتبه دهم دقت مورد نظر حاصل می‌شود.

### ۳-۲- تأثیر پارامتر ضریب شیب مقطع بر ضریب طول مؤثر و

#### فرکانس طبیعی بی‌بعد

در این بخش به بررسی ضریب شیب مقطع غیرمنشوری بر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد ستون پرداخته می‌شود. بدین منظور، تغییرات ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد ستون غیرمنشوری به‌ازای مقادیری از ضریب شیب مقطع  $0 < \beta < 0.9$  و ضریب حرارتی بی‌بعد  $\gamma = 0.5$  برای شرایط مرزی دوسرهمفصلی بررسی می‌شود.

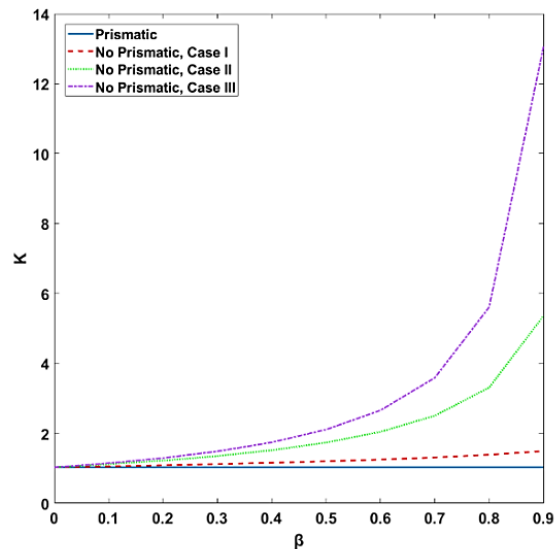


شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب ضریب شیب ستون دوسرهمفصلی غیرمنشوری (تغییرات خطی-مکعبی-مرتبه چهارم ممان اینرسی) با ضریب تغییرات حرارتی  $\gamma = 0.5$

مطابق شکل (۳) مشخص است، افزایش ضریب شیب مقطع باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد ستون می‌شود. در حالت تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی، طول و عرض مقطع هم‌زمان با شیب مشخصی تغییر می‌کند. با کاهش ابعاد، مقدار صلبیت خمشی ستون غیرمنشوری نیز کاهش می‌یابد. از طرفی، بین فرکانس طبیعی و صلبیت خمشی رابطهٔ مستقیم وجود دارد. با کاهش صلبیت خمشی مقدار فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. در نتیجه کاهش فرکانس طبیعی برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در مقایسه با تغییرات خطی-مکعبی غیرمنشوری و ستون منشوری چشم‌گیرتر است.

### ۳-۳- تأثیر پارامتر ضریب تغییرات حرارتی بر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد

در این بخش به بررسی ضریب تغییرات حرارتی بر ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد ستون پرداخته می‌شود. بدین منظور، تغییرات ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد ستون غیرمنشوری و منشوری به‌ازای مقادیری از ضریب تغییرات حرارتی  $0 < \gamma < 0.9$  و شیب مقطع  $\beta = 0.5$  برای شرایط مرزی دوسرهمفصلی بررسی می‌شود.



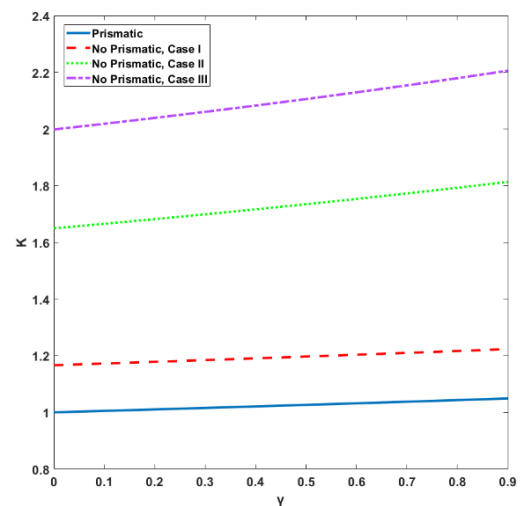
شکل ۴- تغییرات طول مؤثر بر حسب ضریب شیب ستون دوسرهمفصلی غیرمنشوری (تغییرات خطی-مکعبی-مرتبه چهارم ممان اینرسی) با ضریب تغییرات حرارتی  $\gamma = 0.5$

مطابق شکل (۴) مشخص است برای مقدار ضریب شیب  $\beta = 0$  ضریب طول مؤثر  $K = 1.026$  است. افزایش ضریب شیب مقطع باعث افزایش ضریب طول مؤثر و کاهش ظرفیت بار بحرانی ستون می‌شود. برای حالت تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در طول ستون تغییرات طول مؤثر بر حسب ضریب شیب شدیدتر است؛ زیرا در تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی، طول و عرض مقطع مستطیلی در راستای عضو و با شیب ( $\beta$ ) به‌صورت هم‌زمان کاهش می‌یابد و باعث کاهش صلبیت خمشی ستون می‌گردد.

مطابق شکل (۵) مشخص است، افزایش ضریب تغییرات حرارتی باعث کاهش فرکانس طبیعی ستون می‌شود. در واقع افزایش ضریب تغییرات حرارتی سبب کاهش صلبیت خمشی ستون می‌شود و با توجه به وجود رابطه مستقیم بین فرکانس طبیعی و صلبیت خمشی، با کاهش صلبیت خمشی مقدار فرکانس طبیعی ستون نیز کاهش می‌یابد. صلبیت خمشی ستون با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در مقایسه با تغییرات خطی-مکعبی کوچک‌تر است. به همین دلیل شیب تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب ضریب تغییرات حرارتی برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در مقایسه با موارد دیگر تندتر می‌شود. همچنین تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب تغییرات حرارتی در ستون منشوری شیب کندتری دارد.

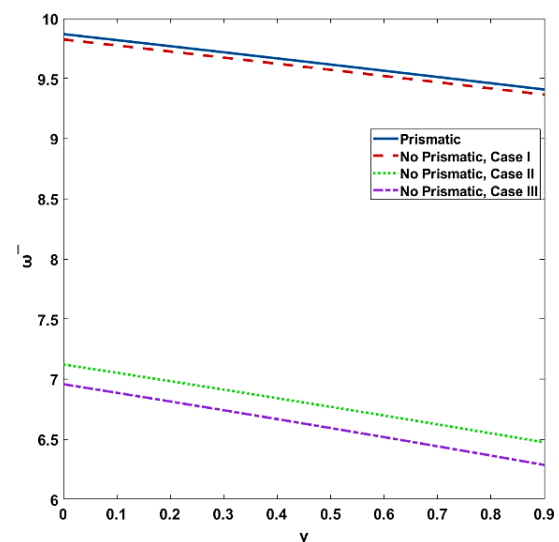
### ۳-۴- تأثیر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و تغییرات حرارتی بر ضریب طول مؤثر

در این بخش به بررسی اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع غیرمنشوری و تغییرات حرارتی بر ضریب طول مؤثر ستون پرداخته می‌شود. بدین منظور، ضریب طول مؤثر ستون غیرمنشوری به‌ازای مقادیری از ضریب شیب مقطع  $0 < \beta < 0.9$  و ضریب حرارتی بی‌بعد  $0 < \gamma < 0.9$  به‌ازای شرایط مرزی محاسبه می‌شود. برای به‌کارگیری نتایج، تغییرات طول مؤثر بر حسب تغییرات حرارتی و ضریب شیب مقطع به‌صورت منحنی هم‌تراز نمایش داده می‌شود. تمامی پارامترهای معادله از جمله ضریب تغییرات حرارتی ( $\gamma$ ) و ضریب شیب مقطع ( $\beta$ ) و ضریب طول مؤثر ( $K$ ) پارامترهای بی‌بعد هستند. نتایج این تحقیق قابلیت تعمیم دارد و مهندسان می‌توانند از نمودارهای هم‌تراز برای طراحی ستون‌های غیرمنشوری با تغییرات حرارتی استفاده کنند.



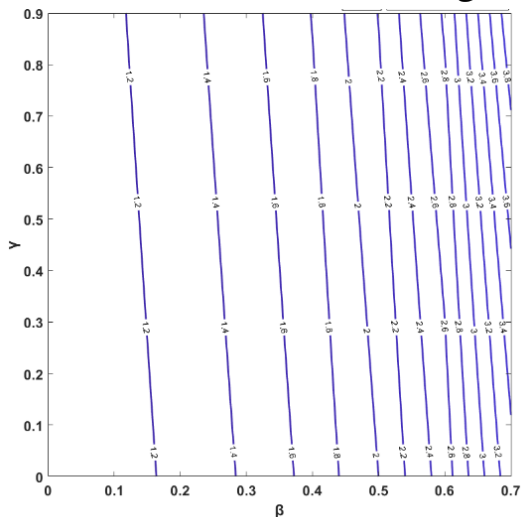
شکل ۴- تغییرات ضریب طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی ستون دوسر مفصلی غیرمنشوری (تغییرات خطی-مکعبی-مرتبه چهارم ممان اینرسی) و  $\beta = 0.5$

مطابق شکل (۴) مشخص است، افزایش ضریب تغییرات حرارتی باعث افزایش ضریب طول مؤثر و کاهش ظرفیت بار بحرانی ستون می‌شود. در واقع افزایش ضریب تغییرات حرارتی سبب کاهش صلبیت خمشی ستون می‌شود. همچنین افزایش تغییرات طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در مقایسه با حالت‌های دیگر نیز مشهودتر است. تغییرات طول مؤثر برای ستون منشوری نیز کندتر است و در برابر ناپایداری حرارتی مقاوم‌تر است.



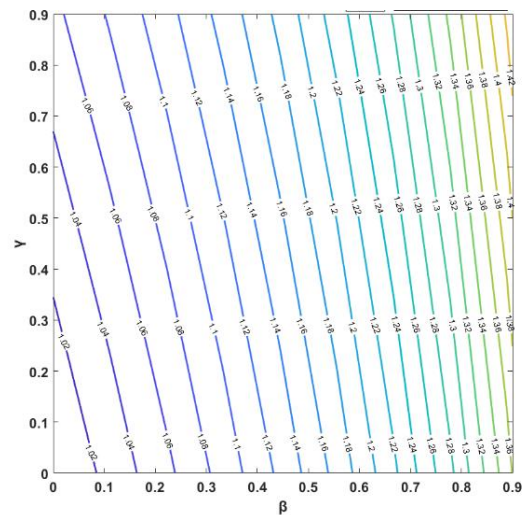
شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب ضریب تغییرات حرارتی ستون دوسر مفصلی غیرمنشوری (تغییرات خطی-مکعبی-مرتبه چهارم ممان اینرسی) و  $\beta = 0.5$

در شکل (۷) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون دوسر ساده با تغییرات مکعبی ممان اینرسی نشان داده شده است. مطابق حالت قبل، افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی باعث افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در حالت مکعبی برابر  $3/83$  است.



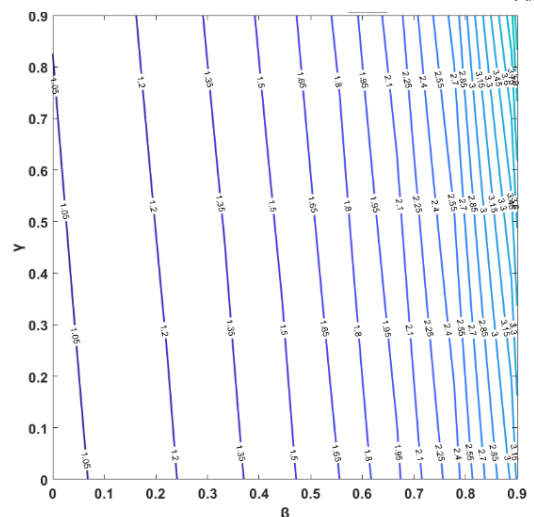
شکل ۸- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی (Case III) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی دوسر ساده (S-S)

در شکل (۸) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون دوسر ساده با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی نشان داده شده است. مطابق دو حالت قبل، افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی باعث افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر  $43/57$  است. تغییرات طول مؤثر برای تغییرات مرتبه چهارم در مقایسه با حالت‌های دیگر بحرانی‌تر است. زیرا برای تغییرات خطی ممان اینرسی مرتبه چهارم، پهنا و ضخامت به‌طور خطی با شیب یکسان و به‌طور هم‌زمان در امتداد طول مقطع تغییر می‌کند. به این ترتیب، صلیب خمشی تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در مقایسه با تغییرات مکعبی خطی ممان اینرسی کوچک‌تر می‌شود.



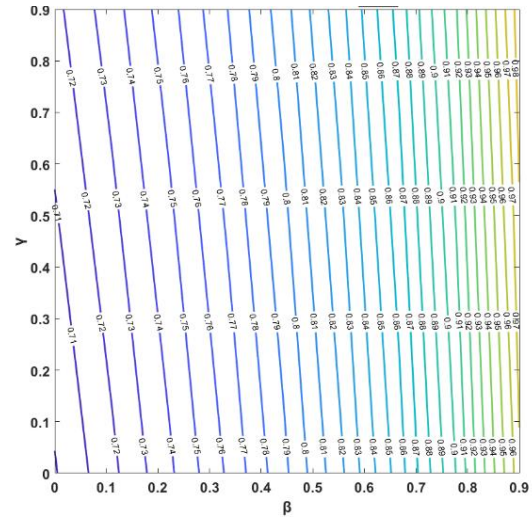
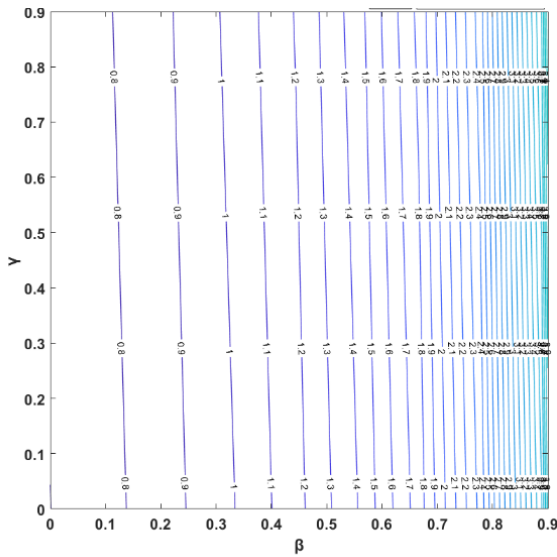
شکل ۶- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی دوسر ساده (S-S)

در شکل (۶) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی نشان داده می‌شود. مطابق شکل مشخص است اگر شرایط مرزی دوسر ساده (S-S) و تغییرات ممان اینرسی در طول ستون به‌صورت خطی فرض شود، افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی باعث افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد. با توجه به رابطه (۲۶) با افزایش ضریب طول مؤثر ظرفیت بارکمانشی ستون کاهش می‌یابد. بیشینه تغییرات طول مؤثر ستون دو سر ساده بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر  $1/4$  است. مشخص است که با افزایش ضریب بار حرارتی و ضریب شیب، سختی خمشی ستون الاستیک کاهش می‌یابد.



شکل ۷- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی دوسر ساده (S-S)

حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در حالت مکعبی برابر  $\frac{2}{33}$  است.

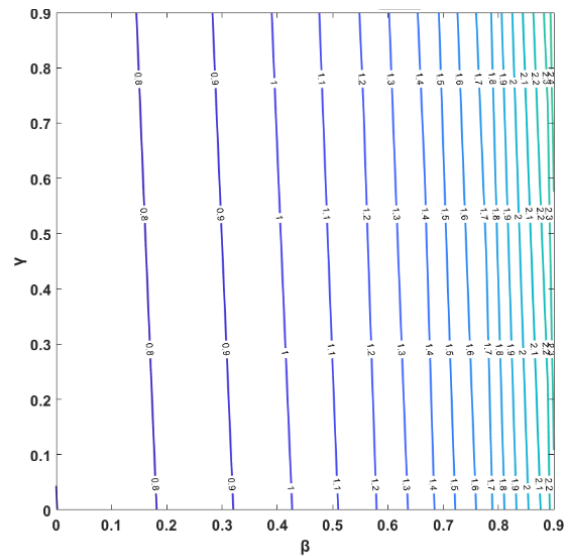


شکل ۹- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-ساده (C-S)

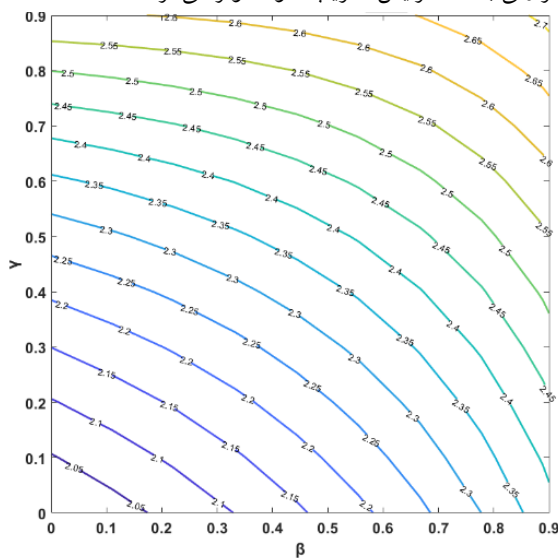
شکل ۱۱- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی (Case III) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-ساده (C-S)

در شکل (۹) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون گیردار-ساده با تغییرات خطی ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در حالت خطی برابر  $0.98/0$  است.

در شکل (۱۱) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون گیردار-ساده با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر  $3/7$  است. مطابق شرایط مرزی دوسر ساده در تمامی حالت‌های تغییرات ممان اینرسی، افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی باعث افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد.



شکل ۱۰- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-ساده (C-S)

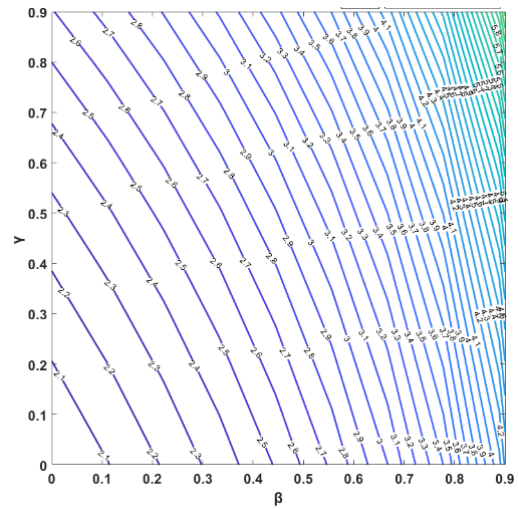


شکل ۱۲- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)

در شکل (۱۰) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون گیردار-ساده با تغییرات مکعبی ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر

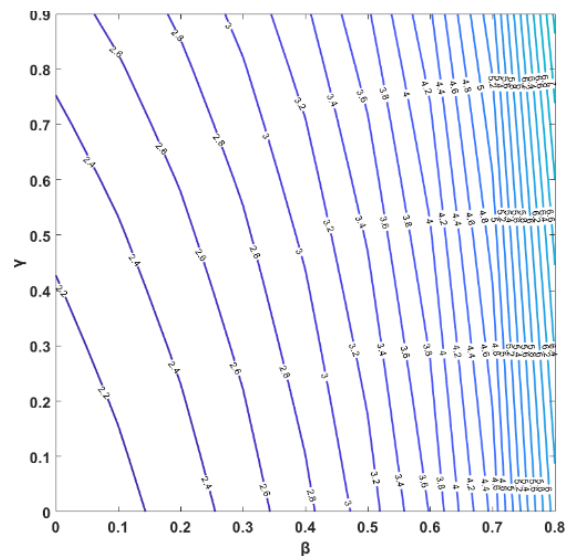


در شکل (۱۲) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون گیردار-آزاد با تغییرات خطی ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر ۲/۷ است.



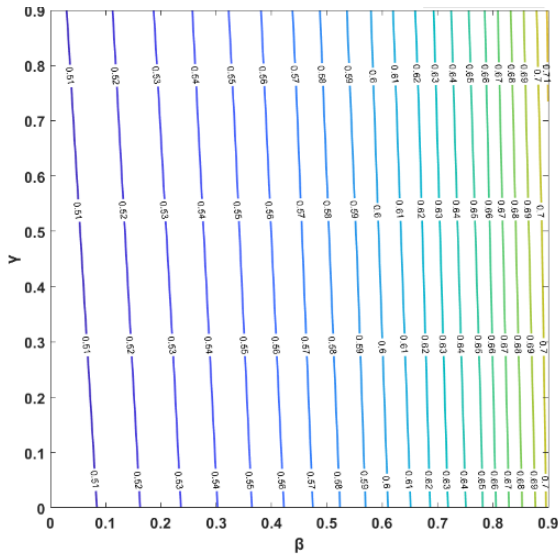
شکل ۱۳- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)

در شکل (۱۳) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون گیردار-آزاد با تغییرات خطی ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر ۵/۹۷ است.



شکل ۱۴- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی (Case III) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)

در شکل (۱۴) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون گیردار-آزاد با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر ۱۲/۸۳ است. مطابق شرایط مرزی گیردار-ساده در تمامی حالت‌های تغییرات ممان اینرسی، افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی باعث افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد.



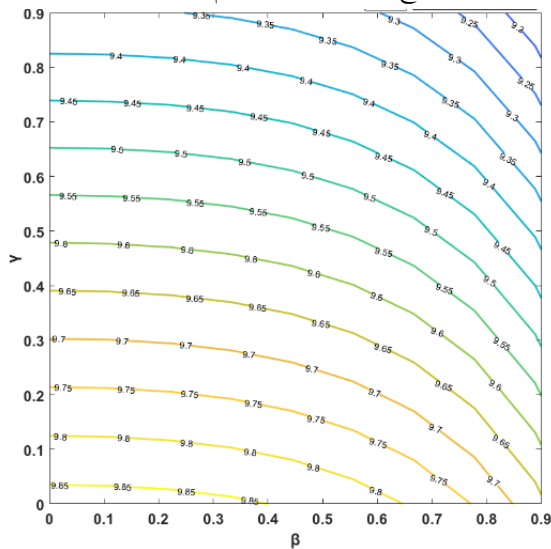
شکل ۱۵- تغییرات طول مؤثر ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C)

در شکل (۱۵) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون گیردار-گیردار با تغییرات خطی ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر ۰/۷ است.

مرتبه چهارم ممان اینرسی نشان داده شده است. بیشینه طول مؤثر بر حسب ضریب تغییرات حرارتی و شیب مقطع در این حالت برابر  $2/60$  است. مطابق شرایط مرزی گیردار-آزاد در تمامی حالت‌های تغییرات ممان اینرسی در طول ستون، افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی باعث افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد. همچنین در تمامی حالت‌های شرایط مرزی مختلف، برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی، ستون بحرانی‌ترین وضعیت را دارد.

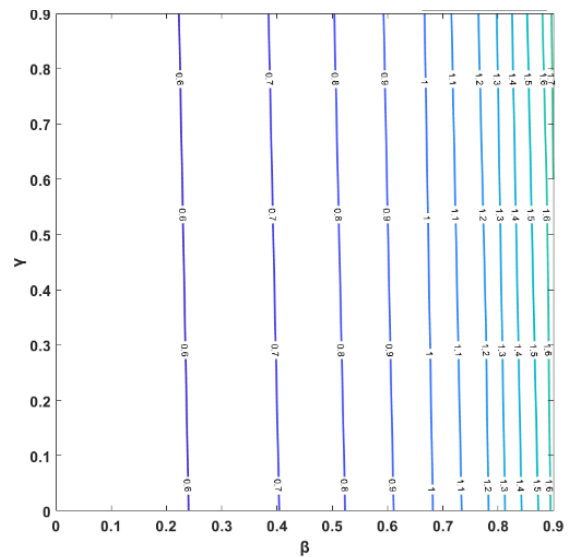
### ۳-۵- تأثیر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و تغییرات حرارتی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد

در این بخش به بررسی اثر هم‌زمان شیب مقطع ( $\beta$ ) مقطع غیرمنشوری و تغییرات حرارتی ( $\gamma$ ) بر فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\bar{\omega}$ ) ستونی الاستیک پرداخته می‌شود. بدین منظور، ضریب طول مؤثر ستون غیرمنشوری به‌ازای ضریب شیب مقطع  $0 < \beta < 0.9$  و ضریب حرارتی بی‌بعد  $0 < \gamma < 0.9$  به‌ازای شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شود. برای کاربرد نتایج در محاسبات مهندسی، تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب تغییرات حرارتی و ضریب شیب مقطع به‌صورت منحنی هم‌تراز نمایش داده می‌شود.

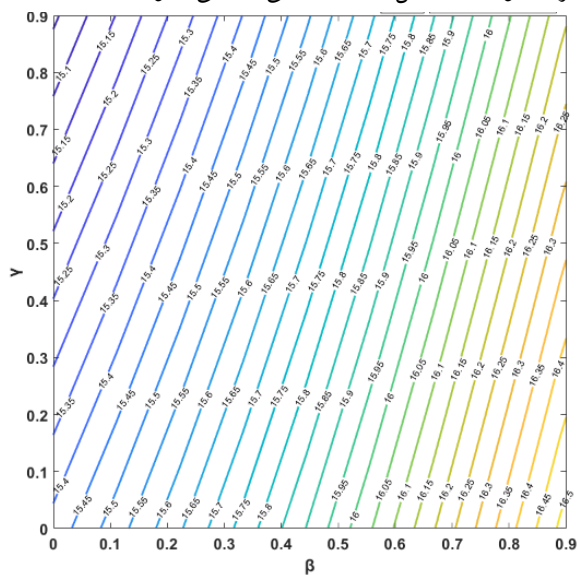


شکل ۱۸- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی دوسر ساده (S-S)

در شکل (۱۸) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب ضریب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی نشان داده شده است. مطابق شکل برای ستونی غیرمنشوری الاستیک با شرایط مرزی دوسر ساده (S-S)، افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. محدوده



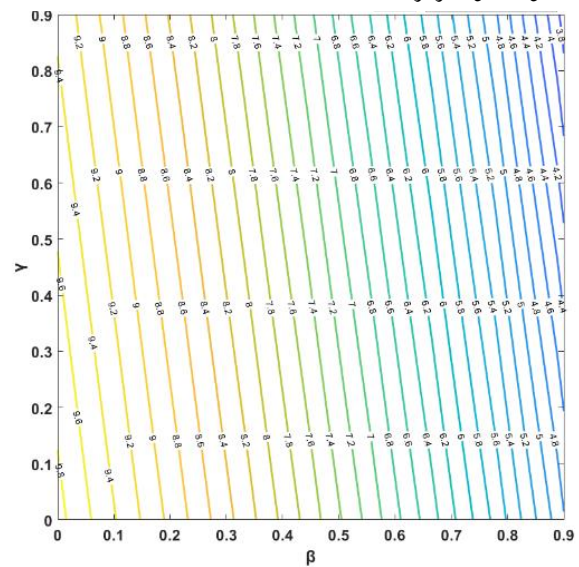
در شکل (۲۰) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب ضریب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون دوسر ساده با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی نشان داده شده است. همانند تغییرات خطی و مکعبی، در این حالت نیز افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات مکعبی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۹/۰-۸۷/۶۳) است. تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی شدیدتر است؛ زیرا سختی خمشی ستون کم‌ترین مقدار را دارد. از طرفی افزایش ضریب تغییرات حرارتی نیز به‌عنوان یک عامل کاهشدهنده سختی خمشی ستون است.



شکل ۲۱- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-ساده (C-S)

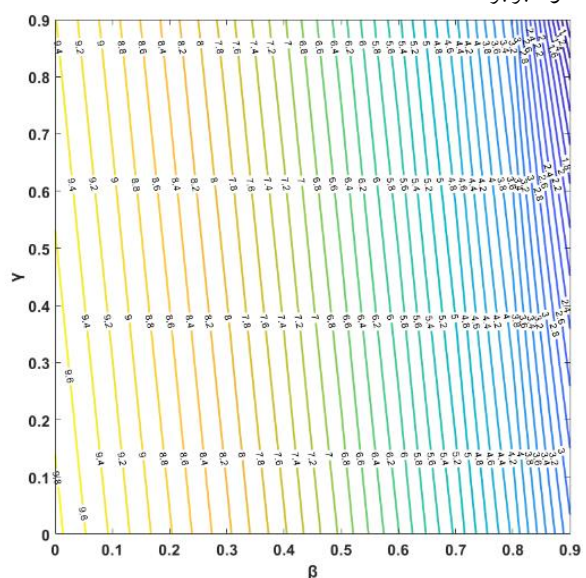
مطابق شکل (۲۱) برای ستونی غیرمنشوری تغییرات خطی الاستیک با شرایط مرزی گیردار-ساده (C-S)، افزایش شیب مقطع به‌عنوان عامل افزایشدهنده و افزایش ضریب تغییرات حرارتی به‌عنوان عامل کاهشدهنده فرکانس طبیعی بی‌بعد تلقی می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات خطی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۱۶/۵۰-۱۵/۰۴) است.

تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات خطی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۹/۱۶-۹/۸۷) است.



شکل ۱۹- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی دوسر ساده (S-S)

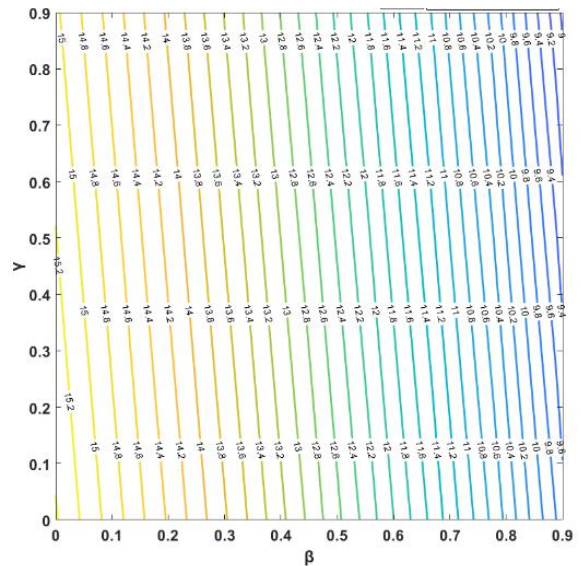
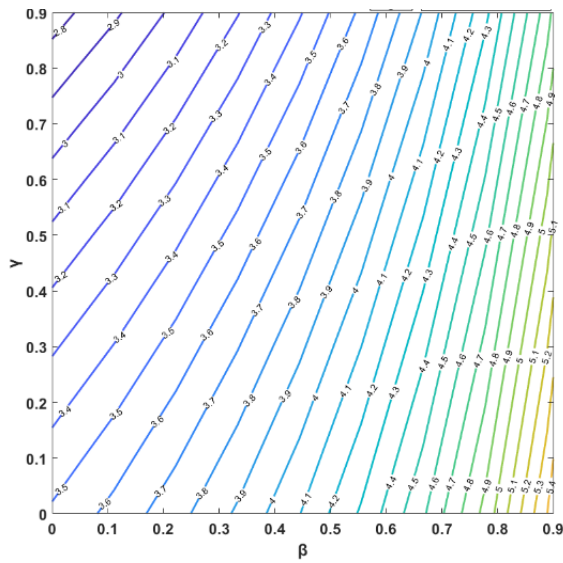
در شکل (۱۹) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب ضریب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای ستون دوسر ساده با تغییرات مکعبی ممان اینرسی نشان داده شده است. در این حالت نیز افزایش شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات مکعبی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۹/۸۷-۳/۸۴) است.



شکل ۲۰- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی (Case III) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی دوسر ساده (S-S)



برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در طول ستون برابر (۱۵/۴۲-۱۰/۲۰) است.

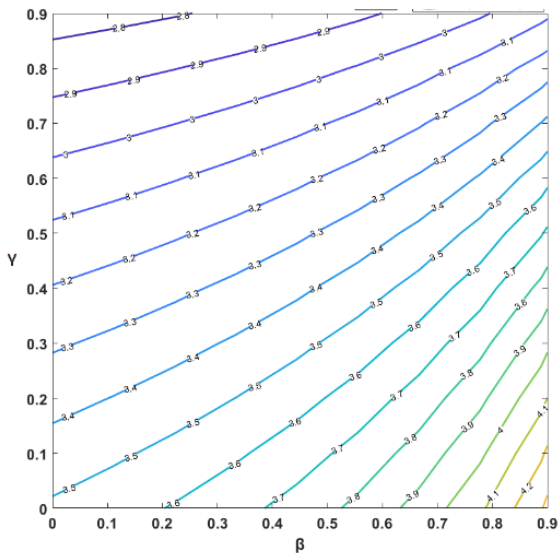
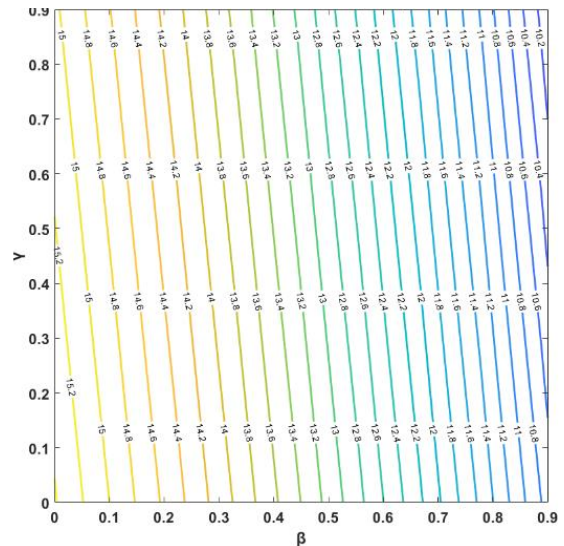


شکل ۲۲- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیر منشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-ساده (C-S)

شکل ۲۴- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیر منشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)

مطابق شکل (۲۲) برای تغییرات مکعبی ممان اینرسی، افزایش شیب و ضریب تغییرات حرارتی سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات مکعبی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۱۵/۴۲-۹/۰۹) است.

مطابق شکل (۲۴) برای ستونی غیر منشوری تغییرات خطی الاستیک با شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)، افزایش شیب به‌عنوان عامل افزایشنده و افزایش ضریب تغییرات حرارتی به‌عنوان عامل کاهشنده فرکانس طبیعی بی‌بعد تلقی می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات خطی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۶/۰۷-۲/۷۵) است.

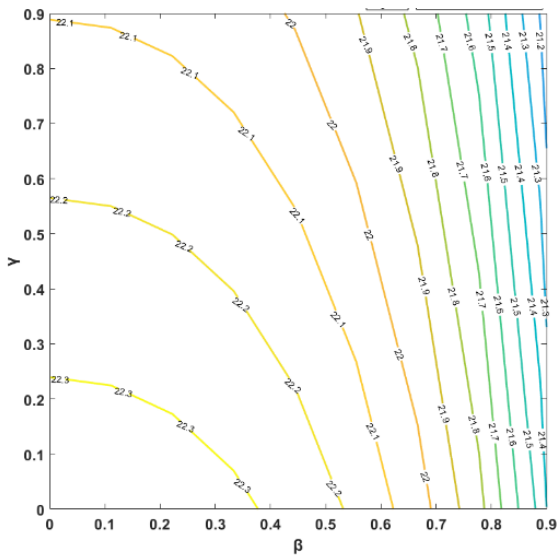


شکل ۲۳- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیر منشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی (Case III) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-ساده (C-S)

شکل ۲۵- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیر منشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)

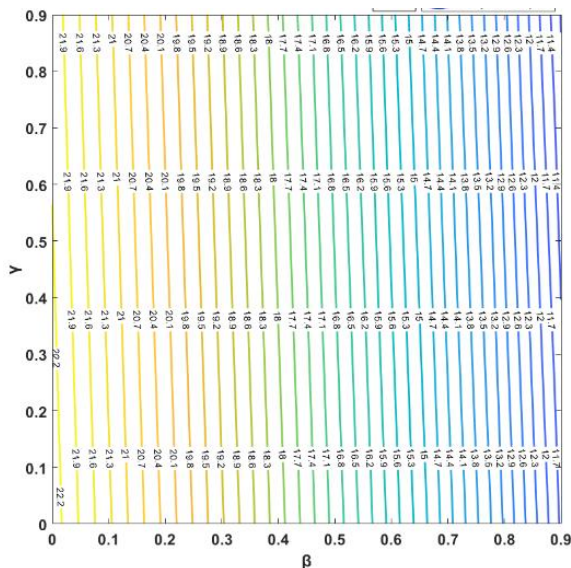
مطابق شکل (۲۳) برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی نیز افزایش شیب و ضریب تغییرات حرارتی سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد





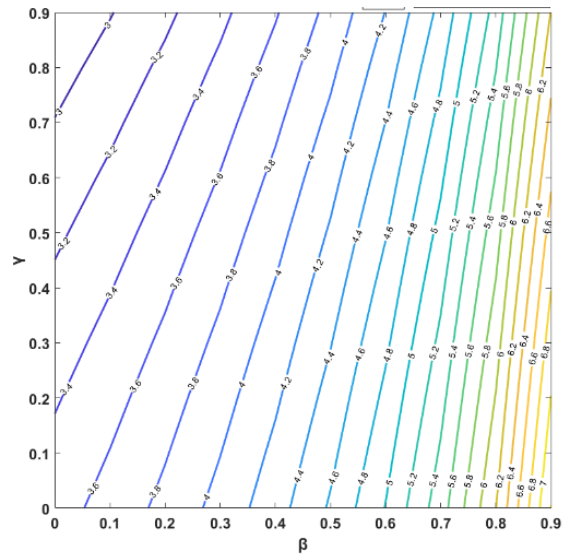
شکل ۲۷- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C)

مطابق شکل (۲۷) برای ستونی غیرمنشوری تغییرات خطی الاستیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C)، افزایش شیب و افزایش ضریب تغییرات حرارتی به‌عنوان عامل کاهنده فرکانس طبیعی بی‌بعد تلقی می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات خطی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۲۲/۲۱-۳۷/۱۹) است.



شکل ۲۸- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C)

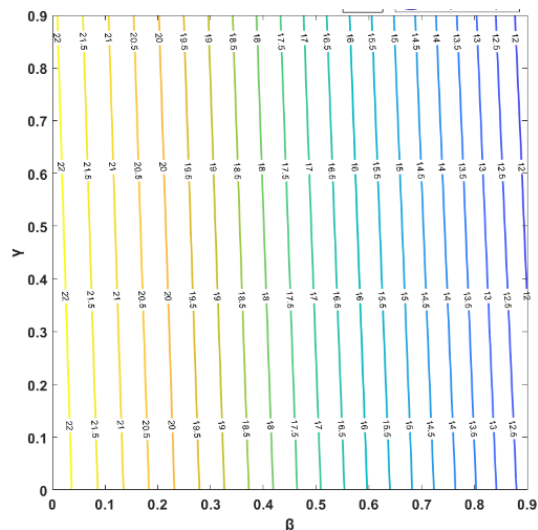
مطابق شکل (۲۵) برای ستونی غیرمنشوری تغییرات مکعبی الاستیک با شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)، افزایش شیب به‌عنوان عامل افزایشنده و افزایش ضریب تغییرات حرارتی به‌عنوان عامل کاهنده فرکانس طبیعی بی‌بعد تلقی می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات مکعبی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۲/۷۵-۴/۲۹) است.



شکل ۲۶- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی (Case III) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F)

مطابق شکل (۲۶) برای ستونی غیرمنشوری تغییرات مرتبه چهارم الاستیک با شرایط مرزی گیردار-آزاد (C-F) همانند دو حالت قبل، افزایش شیب به‌عنوان عامل افزایشنده و افزایش ضریب تغییرات حرارتی به‌عنوان عامل کاهنده فرکانس طبیعی بی‌بعد تلقی می‌شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در طول ستون برابر (۷/۲۰-۲/۸۴) است.

مطابق شکل (۲۸) برای ستونی غیرمنشوری تغییرات مکعبی الاستیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C)، افزایش شیب و افزایش ضریب تغییرات حرارتی به عنوان عامل کاهنده فرکانس طبیعی بی بعد تلقی می شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد برای تغییرات مکعبی ممان اینرسی در طول ستون برابر (۲۲/۲۹-۳۷/۱۱) است.



شکل ۲۹- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد ستونی الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی (Case III) بر حسب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C)

مطابق شکل (۲۹) برای ستونی غیرمنشوری تغییرات مرتبه چهارم الاستیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C) همانند دو حالت قبل، افزایش شیب و افزایش ضریب تغییرات حرارتی به عنوان عامل کاهنده فرکانس طبیعی بی بعد تلقی می شود. محدوده تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد برای تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در طول ستون برابر (۲۲/۳۷-۱۱/۸۳) است. بدیهی است که نوع شرایط مرزی تکیه گاهی و تغییرات ممان اینرسی در طول ستون بر افزایش یا کاهش فرکانس طبیعی بی بعد اثرگذار است. در تحقیق حاضر صرفاً به مطالعه کمانش ارتجاعی پرداخته می شود. در بحث کمانش غیرارتجاعی موارد زیر قابل ذکر است؛ همان طور که در مراجع [۲۰ و ۲۱] اشاره شده است، برای کمانش یک ستون منشوری دوسرمفصل تحت بار متمرکز، لنگر خمشی ناشی از کمانش در میان ستون رخ می دهد، درحالی که در صورت افزودن مصالح در قسمت تحتانی ستون (نزدیک تکیه گاه A در شکل (۱)) به بار کمانشی افزوده شده و نیز مقطع بحرانی کمانش ستون به سمت مقاطع کوچک تر (به سمت تکیه گاه B) حرکت خواهد کرد؛ از سوی دیگر، همان طور که در مطالعات شانلی<sup>۱</sup> آمده

است [۲۲] نمودار مدول مماسی در برابر تنش فشاری اسمی، روندی نزولی دارد، یعنی به ازای افزایش تنش فشاری فراتر از حد تسلیم، از میزان مدول مماسی کاسته می شود، به عبارت دیگر مدول مماسی در هر لحظه به دلیل رفتار غیرخطی ماده، متغیر بوده و نمی توان برای محاسبه بار بحرانی کمانش از یک مدول الاستیسیته ثابت استفاده نمود. در نتیجه برای محاسبه مدول الاستیسیته باید در هر سطح تنش، شیب خط مماس بر منحنی تنش-کرنش را محاسبه نمود که به آن مدول الاستیسیته مماسی (تانژانتی) یا  $(E_t)$  گفته می شود. از سوی دیگر در ستون های منشوری، با کاهش نسبت لاغری، افزایش بار بحرانی (نسبت به کمانش الاستیک) را شاهد هستیم و اثر نرخ تغییرات لاغری بر افزایش بار بحرانی، در برابر نرخ کاهش مدول مماسی در کمانش غیرارتجاعی بیش تر است. در ستون های غیرمنشوری تحت بار متمرکز، بار بحرانی منجر به تنش کم تر از حد تسلیم در نواحی با مقاطع عرضی بزرگ تر (نزدیک تکیه گاه A) و تنش نزدیک و یا فراتر از حد تسلیم در نواحی با مقاطع عرضی کوچک تر (نزدیک تکیه گاه B) خواهد شد، یعنی موضع کمانش غیرارتجاعی دیگر در میانه ستون نیست؛ تعیین بار کمانشی غیرارتجاعی مستلزم تعیین موضع دقیق مقطع بحرانی کمانش و نواحی غیرارتجاعی و ارتجاعی ستون غیرمنشوری است. بدین منظور لازم است از تکنیک های دیگر نظیر ارائه تابع تخمین تغییرات مدول مماسی بر حسب تنش در مقطع و نیز بر حسب مختصات مقاطع عرضی متغیر ستون (یعنی E در فرمول (۱) متغیری به صورت  $E(x, \sigma)$  خواهد شد)، و نیز تقسیم بندی بیش تر ستون غیرمنشوری به قطعات کوچک تر در طی روند سعی و خطا، بهره گرفت، از این رو، پرداختن به این موضوع فراتر از گستره مطالب این مقاله بوده و نویسندگان در نظر دارند در پژوهش آتی به مسئله کمانش غیرارتجاعی ستون غیرمنشوری تحت تغییرات دما بپردازند.

### ۳-۶-مثال

مطابق شکل (۳۰) یک ستون دوسرمفصل با جان ماهیچه ای که نیم رخ متقارن دارد و تحت تحلیل ارتعاشی و پایداری قرار دارد در نظر گرفته شده است. فرض می شود ستون با مشخصات فیزیکی جدول (۹) تحت تغییرات دمایی  $\Delta T = 70$  (C) قرار گرفته است.

<sup>1</sup> Shanley

جدول ۹- مشخصات ستون

$L = 8m$	طول ستون
$\beta = 0.5$	ضریب بازشوندگی
$A_0 = 0.0092 m^2$	سطح مقطع بزرگتر در ابتدای عضو
$I_0 = 0.0006824 m^4$	ممان اینرسی بزرگتر در ابتدای عضو
$E_s = 210 GPa$	مدول الاستیسیته فولاد
$\rho_s = 7850 \frac{kg}{m^3}$	جرم مخصوص فولاد (ST52)
$\alpha = 0.0000121 K$	ضریب انبساط حرارتی

با استفاده از اطلاعات جدول (۹) مقدار پارامتر ضریب تغییرات حرارتی به این صورت محاسبه می‌شود.

$$\gamma = \frac{\alpha T A_0 L^2}{I_0} = \frac{0.0000121 \times 70 \times 0.0092 \times 8^2}{0.0006824} \quad (28)$$

$$\gamma = 0.73$$

در گام بعدی، با استفاده از پارامترهای شیب مقطع  $\beta = 0.5$  و ضریب تغییرات حرارتی  $\gamma = 0.73$  و نتایج شکل های (۶) و (۱۸) برای حالت اول ستون دوسر مفصلی، مقدار ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد تعیین می‌شود.

$$K = 1.212 \quad (29)$$

$$\bar{\omega} = 9.454$$

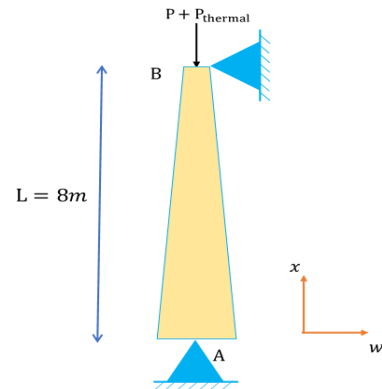
با استفاده از پارامترهای ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد، مقادیر ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی ستون محاسبه می‌شود.

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 L^4}} \quad (30)$$

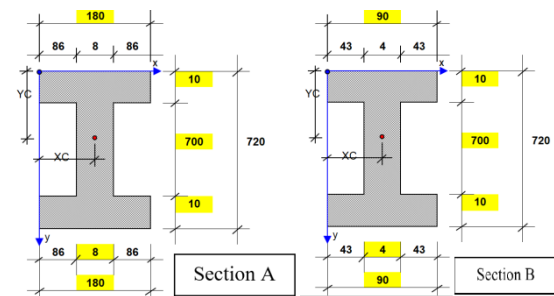
$$\omega = 9.454 \times \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0.000686}{7850 \times 0.0092 \times 8^4}} = 208.08 \text{ Hz}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 0.000686}{1.212^2 \times 8^2} = 15044.03 \text{ KN} \quad (31)$$

مقادیر پارامترهای ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد، ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی متناظر با آن محاسبه شد. شایان ذکر است مقدار ضریب طول مؤثر و ظرفیت بار بحرانی بدون احتساب تغییرات حرارتی به ترتیب برابر  $K = 1$  و



شکل ۳۰- ستون غیرمنشوری دوسر مفصلی تحت بار محوری و تغییرات حرارتی



شکل ۳۱- مقطع عرضی ستون غیرمنشوری دوسر مفصلی در نقاط ابتدایی و انتهایی

مطابق شکل (۳۱) طول بال ستون مدنظر به صورت خطی در طول تیر از ۱۸۰ میلی‌متر در انتهای سمت پایین (Section A) به ۹۰ میلی‌متر در انتهای دیگر (Section B) با شیب ۰/۵ تغییر می‌کند؛ درحالی‌که، ارتفاع جان در طول عضو ثابت باقی می‌ماند. پارامترهای ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی ستون مورد نظر به این صورت تعیین می‌شوند.

ضریب انبساط حرارتی با افزایش دما، افزایش می‌یابد. تابع خطی پیشنهادشده در مرجع [۲۳] برای محاسبه ضریب انبساط حرارتی به شرح زیر است.

$$\alpha(T) = (11.4 + 0.01T) \times 10^{-6} = 0.0000121 K \quad (27)$$

در حالی که مقدار طول مؤثر با لحاظ اثر تغییرات حرارتی برابر  $K = 1.212$  و  $P_{cr} = 15044.03 \text{ KN}$  است. مشخص است تغییرات حرارتی می‌تواند به میزان ۳۲٪ ظرفیت بار بحرانی ستون مورد نظر را کاهش دهد.

#### ۴- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، بر مبنای روش عددی ریتز پایداری و ارتعاشات ستونی غیرمنشوری تحت تغییرات حرارتی بررسی شد. در گام اول، معادله دیفرانسیل با استفاده از روش همیلتون استخراج گردید. در گام بعدی، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم نوشته شد. از چند جمله‌ای سری چبیشف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی و تابع وزن استفاده شده و ماتریس‌های سختی مصالح، سختی هندسی و جرم استخراج گردید. پس از استخراج ماتریس‌های سختی، مقادیر ویژه (ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد) بررسی شد. از تکنیک ریشه‌یابی به وسیله کدنویسی در نرم‌افزار متلب برای محاسبه مقادیر ویژه استفاده شد. خلاصه نتایج پژوهش به شرح ذیل است:

- اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی بی‌بعد بر طول مؤثر ستونی الاستیک بررسی شد. افزایش پارامترهای مذکور در تمامی شرایط تکیه‌گاهی مختلف باعث افزایش طول مؤثر و کاهش ظرفیت بارکمانشی ستون می‌شود.
- اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و ضریب تغییرات حرارتی بی‌بعد بر فرکانس طبیعی بی‌بعد بررسی شد. افزایش پارامترهای مذکور بسته به نوع شرایط تکیه‌گاهی سبب افزایش یا کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود.
- از روش رایلی-ریتز با سری‌های چندجمله‌ای چبیشف برای حل معادله متشکله استفاده شد. روش فوق سرعت همگرایی بیش‌تری در مقایسه با سایر روش‌های عددی دارد. تنها به‌ازای ۱۰ جمله مقادیر ویژه (طول مؤثر، فرکانس طبیعی بی‌بعد) با خطای کم‌تر از ۱٪ به دست آمد.
- تمامی پارامترهای دخیل در مقاله حاضر از جمله (ضریب شیب مقطع  $\beta$ ، ضریب تغییرات حرارتی  $\gamma$ ، ضریب طول مؤثر  $K$  و فرکانس طبیعی  $\omega$  بی‌بعد هستند. همچنین از منحنی‌های هم‌تراز برای نمایش نمودارها استفاده شده است. نتایج این تحقیق قابلیت تعمیم دارد و می‌تواند ملاک طراحی مهندسان قرار گیرد.

#### ۵- پیشنهادها

در مقاله حاضر، پایداری و ارتعاشات تیر اوپلر-برنولی غیرمنشوری با استفاده از روش ریتز بررسی شده است. تغییرات

حرارتی خطی و شرایط مرزی در حالت ایده‌آل در نظر گرفته شده است. موضوعات زیر برای تحقیقات آتی پژوهشگران پیشنهاد می‌شود.

- تحلیل کمانش خمشی و ارتعاشات ستون با مقطع متغیر و اتصالات نیمه‌صلب تحت تغییرات حرارتی بر مبنای تئوری اوپلر-برنولی
- تحلیل کمانش خمشی-پیچشی و ارتعاشات ستون با مقطع متغیر و اتصالات نیمه‌صلب تحت تغییرات حرارتی بر مبنای تئوری اوپلر-برنولی
- تحلیل کمانش خمشی و ارتعاشات ستون با مقطع متغیر تحت تغییرات حرارتی بر مبنای تئوری تیموشنکو
- تحلیل کمانش خمشی و ارتعاشات ستون با مقطع متغیر تحت کمانش حرارتی غیرخطی بر مبنای تئوری تیموشنکو
- تحلیل کمانش خمشی-پیچشی و ارتعاشات ستون با مقطع متغیر تحت تغییرات حرارتی بر مبنای تئوری تیموشنکو
- کمانش غیرارتجاعی ستون غیرمنشوری تحت تغییرات دما

[۱۶] سلطانی، م.، سیستانی، ا.، عسگریان، ب.، (۱۳۹۷)، "بررسی پایداری ستون‌های غیرمنشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی و بسط مک لورن"، نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد، ۲۴، ۱۲، ۲۹-۴۰.

[۱۷] سلطانی، م.، عسگریان، ب.، (۱۳۹۷)، "تحلیل پایداری و ارتعاشی آزاد ستون‌های غیرمنشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی و گالرکین"، نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، ۶، ۵۰، ۱۰۱۷-۱۰۳۲.

[۱۸] مقررات ملی ساختمان ایران (۱۴۰۱) - مبحث دهم، طرح و اجرای ساختمان‌های فولادی، وزارت راه و شهرسازی، معاونت مسکن و ساختمان، ایران.

[19] Kiani, Y., and Eslami, MR. (2013), "An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium", *Composites Part B: Engineering*, Feb 1;45(1):101-10.

[20] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M. (1961), "Theory of elastic stability", McGraw-Hill, New York, N.Y

[21] Groper, M., and Kenig, M.J. (1987), "Inelastic buckling of nonprismatic columns", *Journal of engineering mechanics*, 113(8), pp.1233-1239.

[22] Shanley, F.R. (1957), "Strength of materials", McGraw-Hill, New York, N.Y.

[23] Kirby, B.R., and Preston, R.R. (1988), "High temperature properties of hot-rolled, structural steels for use in fire engineering design studies", *Fire safety journal*, 13(1), pp.27-37.

[1] Euler, L., (1952), "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti", (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

[2] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M. (2009), "Theory of elastic stability", Courier Corporation.

[3] Bazant, Z.P., Cedolin, L., and Hutchinson, J.W. (1993), "Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories".

[4] Morley, A. (1917), "Critical loads for long tapering struts", *Engineering*, 104, p.295.

[5] Shi-rong, L., Chang-jun, C., and You-he, Z. (2003), "Thermal post-buckling of an elastic beams subjected to a transversely non-uniform temperature rising", *Applied Mathematics and Mechanics*, 24, pp.514-520.

[6] Wang, C.M., and Wang, C.Y. 2004. Exact solutions for buckling of structural members (Vol. 6). CRC press.

[7] Raftoyiannis, I., Stamatopoulos, G.N., and Ermopoulos, J. (2006), "Buckling Behaviour of Doubly-Tapered Steel Columns Under Axial Compression and Biaxial Bending", In Proceedings of the International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures, SDSS (pp. 331-338).

[8] Singh, K.V., and Li, G. (2009), "Buckling of functionally graded and elastically restrained non-uniform columns", *Composites Part B: Engineering*, 40(5), pp.393-403.

[9] Pinarbasi, S. (2012), "Buckling analysis of nonuniform columns with elastic end restraints", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7(5), pp.485-507.

[10] Ghannadpour, S.A.M., Mohammadi, B., and Fazilati, J. (2013), "Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method", *Composite Structures*, 96, pp.584-589.

[11] Zhang, B.H., Guo, Y.L., and Dou, C. (2013), "Ultimate bearing capacity of asymmetrically double tapered steel columns with tubular cross-section", *Journal of Constructional Steel Research*, 89, pp.52-62.

[12] Avcar, M. (2014), "Elastic buckling of steel columns under axial compression", *American journal of civil engineering*, 2(3), pp.102-108.

[13] Cao, K., Guo, Y.J., and Xu, J. (2016), "Buckling analysis of columns ended by rotation-stiffness spring hinges", *International journal of steel structures*, 16, pp.1-9.

[۱۴] فتحی، م.، شهلایی ن.، پرویزی م.، (۱۳۹۷)، "معادلات شیب افست برای تیر ستونهای داری نقص اولیه و اتصالات نیمه صلب با لحاظ اثرات برشی"، نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد، ۲۳، ۱۲، ۶۵-۷۴.

[15] Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A.R., and Alepaighambar, A. (2018), "Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing", *Steel and Composite Structures, An International Journal*, 28(4), pp.403-414.

